

moodle ► 251_EMPRE302_08308_32 ► Galdetegiak ► Etxebizitzen eskaria ► 1 saiakera

Galdetegia eguneratu

Informazioa Emaizak Aurreikusi Editatu

Etxebizitzen eskaria aurreikusi

Hasi berriro

Oharra: zure ikasleek ezin dute eskuratu orain galdetegi hau

1 ✖ Etxebizitzen eskaria bi aldagaien menpekoa da:

Puntuak:
--/20

- p : metro karratuaren prezioa, eurotan
- i : bankuek erabiltzen duten interes-tasa (euriborra)

Donostian egindako ikerketa batek erakusten du hilabete batean etxebizitzak erosteko eskaria funtzio honek adierazten duela:

$$D(p, i) = \frac{600.000}{p} - 500 \cdot i$$

Kalkulatu zenbat etxebizitza saldu diren Donostian hilabete horretan, metro karratuaren prezioa $p=6000$ €koa denean, eta euriborra $i = \%3 = 0,03$ bada. Kasu horretan, deribatu partzialak eta elastikotasunak ere kalkulatu (balio absolutuan).

Ondoren galdera hauetatik zuzenak aukeratu:

- Gutxienez erantzun bat aukeratu
- ☐ A. Hilabete horretan 100 etxebizitza saldu dira
 - ☐ B. Hilabete horretan 85 etxebizitza saldu dira
 - ☐ C. Hilabete horretan 60 etxebizitza saldu dira
 - ☐ D. Eskaria gorakorra da p eta i aldagaiekiko
 - ☐ E. Eskaria gorakorra da p -rekiko eta beherakorra i -rekiko
 - ☐ F. Eskaria beherakorra da p eta i aldagaiekiko
 - ☐ G. Elastikotasuna p -rekiko = 0,52 ; Elastikotasuna i -rekiko = 1,21
 - ☐ H. Elastikotasuna p -rekiko = 1,17 ; Elastikotasuna i -rekiko = 0,17
 - ☐ I. Elastikotasuna p -rekiko = 0,17 ; Elastikotasuna i -rekiko = 1,17

Bidali

Gorde bidali gabe

Orria bidali

Bidali dena eta bukatu

**Hirugarren gaia: Aldagai aske bakarreko funtzioen hoberenatzea****1.- Zenbait definizio. Hoberen motak**

Funtzio baten hoberenatzea (optimizatzea) bere muturreko balioak aurkitzea da, alegia, bere balio maximo eta minimoak aurkitzea.

Hoberenatzea zenbaki errealeen multzo baten gain egiten da, oro har, E izate-eremu osoan, edo bestela, izate-eremuaren $S \subset E$ azpimultzoan (hoberenatze-tartea).

Puntu hoberenak (optimoak) mota hauetakoak izan daitezke:

- Maximo lokal hertsia: x_0 *M.l.h.* $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(x) < f(x_0)$
- Maximo lokal erlatiboa: x_0 *M.l.e.* $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(x) \leq f(x_0)$
- Minimo lokal hertsia: x_0 *m.l.h.* $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(x) > f(x_0)$
- Minimo lokal erlatiboa: x_0 *m.l.e.* $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(x) \geq f(x_0)$
- Maximo global hertsia: x_0 *M.g.h.* $\Leftrightarrow \forall x \in S : f(x) < f(x_0)$
- Maximo global erlatiboa: x_0 *M.g.e.* $\Leftrightarrow \forall x \in S : f(x) \leq f(x_0)$
- Minimo global hertsia: x_0 *m.g.h.* $\Leftrightarrow \forall x \in S : f(x) > f(x_0)$
- Minimo global erlatiboa: x_0 *m.g.e.* $\Leftrightarrow \forall x \in S : f(x) \geq f(x_0)$

Beraz, puntu hoberenak sailkatzeko hiru irizpide ditugu:

- Maximoa edo minimoa izatea: funtzioari baliorik handiena edo txikiena ematea.
- Lokala edo globala izatea: puntu hoberena bere ingurune batean, ala hoberenatze multzo osoan izatea.
- Hertsia edo erlatiboa izatea: soilik puntu horretan funtzioak lortzea muturreko balioa, edo beste punturen batean ere funtzioak balio bera hartzea.

2.- Hoberen lokalerako beharrezko baldintza. Puntu gerakorrak

$y = f(x)$ funtzioa deribagarria bada, funtzioaren hurbilketa linealaz badakigu $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ izango dela, x_0 -ren inguruko x puntuetarako. Bestalde, $(x - x_0)$ kenketak balio negatiboak ditu x_0 -ren ezkerretara, eta balio positiboak x_0 -ren eskuinetara.



x_0 maximo lokal hertsia izanik, bere bi aldeetara $f(x) < f(x_0)$ izango da, ondorioz, x -en ezkerreko puntuetarako $f'(x_0) \geq 0$ izatea beharko genuke, eta beste aldean, berriz, $f'(x_0) \leq 0$ izatea, eta bi erlazio horiek batera betetzeko, nahitaezkoa da $f'(x_0) = 0$ egiaztatzea.

Antzera, x_0 minimo lokal hertsia bada, kasu honetan bere bi aldeetara $f(x) > f(x_0)$ izango da, ondorioz, x -en ezkerreko puntuetarako $f'(x_0) \leq 0$ izatea beharko genuke, eta beste aldean, berriz, $f'(x_0) \geq 0$ izatea, eta bi erlazio horiek batera betetzeko, nahitaezkoa da $f'(x_0) = 0$ egiaztatzea.

(Modu bertsuan frogatuko genuke maximo eta minimo lokal erlatiboetarako)

Beraz: x_0 hoberen lokala $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ (baina inplikazioa ez da beste aldera betetzen)

Grafikoki, gauza argia da: puntu batean maximo lokal bat baldin badago, bere ezkerretara funtzioa gorakorra da (deribatu positiboa) eta eskuinetara funtzio beherakorra da (deribatu negatiboa).

Maximo lokalean, deribatua anulatu beharko da, funtzioaren ukitzailea horizontala izanik.

Minimoaren kasuan alderantziz, bere ezkerretara funtzioa beherakorra da, eta eskuinetara, gorakorra, hau da, deribatua negatiboa izatetik, positiboa izatera igarotzen da, eta minimo lokalean anulatu egingo da, hemen ere funtzioarekiko zuzen ukitzailea horizontala delarik.

Baina puntu batean deribatua zero izateak (funtzioa horizontala bihurtzeak) ez du ziurtatzen puntu horretan maximo edo minimo lokal bat dagoenik.

Puntu gerakorrak: $f'(x_0) = 0$ betetzen duten puntu guztiak puntu gerakorrak (edo kritikoak) direla esango dugu, hoberen lokalak izan ala ez.

3.- Hoberen lokalerako baldintza nahikoak

$y = f(x)$ funtzioa bi aldiz deribagarria bada, funtzioaren hurbilketa koadratikoaz badakigu

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 \text{ izango dela, } x_0\text{-ren inguruko } x \text{ puntuetarako.}$$

x_0 puntu gerakorra izanik eta $f''(x_0) < 0$ bada, $(x - x_0)^2$ beti positiboa denez, x_0 -ren bi aldeetan $f(x) < f(x_0)$ beteko da, alegia, x_0 maximo lokal hertsia izango da. Hau da:

$$\left. \begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_0 \text{ maximo lokal hertsia.}$$



Antzera, x_0 puntu gerakorra izanik eta $f''(x_0) > 0$ bada, $(x - x_0)^2$ beti positiboa denez, x_0 -ren bi aldeetan $f(x) > f(x_0)$ beteko da, alegia, x_0 minimo lokal hertsia izango da. Hau da:

$$\left. \begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_0 \text{ minimo lokal hertsia.}$$

(Oharra: puntu batean lehen eta bigarren deribatuak anulatzen badira, hurrengo deribatuen zeinuari begiratu beharko diegu. Anulatzen ez den lehen deribatuak orden bikoitia badu, balio negatiboa hartzen badu maximo lokal batean gaude, balio positiboa hartzen badu, minimo lokala batean)

4.- Tarte bateko hoberen globalak

Bi aldiz deribagarria den funtzio baten puntu hoberenak bilatzen direnean, lehen eta bigarren deribatuak erabil daitezke hoberen lokalak aurkitzeko. Baina irizpide honen bidez, hoberenatze-tartean dauden hoberen globalak ez ditugu lortuko. Horretarako funtzioaren jokaera aztertu beharko da: hoberen lokalak, edo hauetako batzuk, izan daitezke ere hoberen globalak, edo gerta daiteke azken hauek hoberenatze-tarteko muturretan egotea.

Bestalde, maximo globalerako (zein minimo globalerako) funtzioa bornatu gabea izan daiteke, bere irudiek infiniturantz (minus infiniturantz) jotzen badute.

5.- Funtzio ganbil eta ahurrak. Inflexio-puntuak. Hoberen globalerako baldintza nahikoak

Funtzio bat emanda, bere izate-eremuaren puntu batean funtzioarekiko zuzen ukitzailea funtzioaren azpitik geratzen bada, puntu horretan funtzio hori ganbila dela esaten da.

$y = f(x)$ funtzioa bi aldiz deribagarria bada, funtzioaren hurbilketa koadratikoa hartuta x_0 -ren

inguruan, $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2$, bertan zuzen ukitzailea

$z = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ da (lehen bi batugaiak). Funtzioa ganbila izateko $f(x) > z$ bete beharko denez, $f''(x_0) > 0$ izango da.

Funtzio bat emanda, bere izate-eremuaren puntu batean funtzioarekiko zuzen ukitzailea funtzioaren gainetik geratzen bada, puntu horretan funtzio hori ahurra dela esaten da.

$y = f(x)$ funtzioa bi aldiz deribagarria bada, x_0 puntuan funtzioa ahurra izateko $f(x) < z$ bete beharko denez, $f''(x_0) < 0$ izango da.



Funtzio bat ganbila izatetik ahurra izatera (edo ahurra izatetik ganbila izatera) igarotzen den puntuari inflexio-puntua esaten zaio, beraz, bigarren deribatua positiboa izatetik negatiboa izatera aldatuko da (edo alderantziz), eta ondorioz, inflexio-puntuan $f''(x_0) = 0$ da.

(Oharra: puntu batean lehen eta bigarren deribatuak anulatzen badira, hurrengo deribatuen zeinuari begiratu beharko diegu. Anulatzen ez den lehen deribatuak orden bakoitia badu, inflexio-puntu bat da)

Hoberen globalerako baldintza nahikoa:

$y = f(x)$ funtzioa ganbila bada bere izate-eremu osoan (edo hoberenatze-tartean), minimo lokala, globala izango da ere.

$y = f(x)$ funtzioa ahurra bada bere izate-eremu osoan (edo hoberenatze-tartean), maximo lokala, globala izango da ere.

(Oharra: aurreko baldintza nahikoa betetzeko izate-eremuak (edo hoberenatze-tarteak) etenik gabeko multzoa izan behar du)

Hirugarren ikasgaia

1) Hurrengo funtzioen gorakortasun-beherakortasun tarteak eta hoberen lokalak lortu:

a) $y = x^3 - 12x^2 + 45x - 34$ Er: Gorakorra: $x < 3$; $x > 5$; Beherakorra: $3 < x < 5$
 Maximoa (3, 20) ; Minimoa (5, 16)

b) $y = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 12}$ Er: Gorak: $x > 2$; Beher: $x < 2$
 Minimoa (2, 2)

c) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$ ($x \leq 1$; $x \geq 5$) Er: Gorak: $x > 5$; Beher: $x < 1$
 Ez du hoberen lokalik

d) $y = \frac{x^3}{(1+x)^2}$ ($x \neq -1$) Er: Gorak: $x < -3$; $x > -1$ Beher: $-3 < x < -1$
 Maximoa $(-3, -27/4)$

e) $y = \ln(x^2 - 1)$ ($x < -1$; $x > 1$) Er: Gorak: $x > 1$; Beher: $x < -1$
 Ez du hoberen lokalik

f) $y = e^x \cdot (x-1)$ Er: Gorak: $x > 0$; Beher: $x < 0$
 Minimoa (0, -1)

g) $y = x \cdot \ln^2 x$ ($x > 0$) Er: Gorak: $0 < x < e^{-2}$; $x > 1$ Beher: $e^{-2} < x < 1$
 Maximoa $(e^{-2}, 4e^{-2})$; Minimoa (1, 0)

2) Hurrengo funtzioen ganbiltasun-ahurtasun tarteak, inflexio-puntuak eta hoberen lokalak lortu:

a) $y = (x-1)^4$ Er: beti ganbila ; Minimoa (1, 0)

b) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ Er: Ganbila: $x > 1/2$; Ahurra: $x < 1/2$
 Inflexio-puntua $(1/2, 3/2)$
 Maximoa (-1, 15) ; Minimoa (2, -12)

c) $y = \ln(1+x^2)$ Er: Ganbila: $-1 < x < 1$; Ahurra: $x < -1$; $x > 1$
 Inflexio-puntuak $(-1, \ln 2)$; $(1, \ln 2)$
 Minimoa (0, 0)



d) $y = e^{-x^2/2}$

Er: Ganbila: $x < -1$; $x > 1$; Ahurra: $-1 < x < 1$

Inflexio-puntuak $(-1, e^{-1/2})$; $(1, e^{-1/2})$

Maximoa $(0, 1)$

e) $y = \frac{2 \ln x}{x}$ ($x > 0$)

Er: Ganbila: $x > e^{3/2}$; Ahurra: $0 < x < e^{3/2}$

Inflexio-puntuak $(e^{3/2}, 3e^{-3/2})$

Maximoa $(e, 2e^{-1})$

f) $y = x^2 \cdot e^{-x}$

Er: Ganbila: $x < 0,58$; $x > 3,41$; Ahurra: $0,58 < x < 3,41$

Inflexio-puntuak $(0,58, 0,19)$; $(3,41, 0,38)$

Maximoa $(2, 4e^{-2})$; Minimoa $(0, 0)$

3) Hurrengo funtzioen hoberen globalak aurkitu, aipatzen den tartean

* a) $y = (x-2)^4$, $[0, 5]$ tartean.

Er: $(2, 0)$ Minimoa ; $(5, 81)$ Maximoa

* b) $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$, $[0, 3]$ tartean

Er: $(1, 0)$ Minimoa

$(3, 16)$ Maximoa

c) $y = x^2 \cdot \ln x$ ($x > 0$), $[1/4, e]$ tartean

Er: $(e^{-1/2}, \frac{-1}{2e})$ Minimoa ; (e, e^2) Maximoa

* d) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ ($x \neq 0$), $[1/2, 4]$ tartean

Er: $(1, 3)$ Minimoa ; $(4, 5,25)$ Maximoa

4) $f(x) = x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ funtzioak abzisen ardatza ebakitzen du $x = -2$ puntuan, eta inflexio-gune bat du $x = 1$ puntuan, bertan zuzen ukitzaila horizontala izanik. Hori jakinda, a , b eta c koefizienteak lortu, eta funtzioaren hoberen lokalak aurkitu.

Er: $a = -3$; $b = 3$; $c = 26 \rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 26$

Ez du hoberen lokalik

5) $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ funtzioak hoberen lokala du $x = 1$ puntuan, inflexio-gunea $(0, 0)$ puntuan, eta azken puntu honetan, funtzioaren zuzen ukitzaila $y = 3x + 5$ ekuazioko zuzenarekiko paraleloa da.

Hori jakinda, a , b , c eta d koefizienteak lortu, eta funtzioaren hoberen lokalak aurkitu.



Er: $\begin{cases} a = -1 ; b = 0 ; c = 3 ; d = 0 \rightarrow f(x) = -x^3 + 3x \\ \text{Maximoa } (1, 2) ; \text{Minimoa } (-1, -2) \end{cases}$

- 6) $f(x) = (m \cdot x + n) \cdot e^{m \cdot x}$ ($m \neq 0$) funtzioa emanda, m eta n koefizienteak aurkitu jakinik $x = -2$ puntuan hoberen lokal bat duela, eta funtzioaren malda $x = 0$ puntuan 2 dela. Hoberen lokala zein motakoa den adierazi.

Er: $\begin{cases} m = 1 ; n = 1 \rightarrow f(x) = (x+1)e^x \\ m = -1 ; n = -3 \rightarrow f(x) = -(x+3)e^{-x} \end{cases}$ (Bi kasuetan, hoberen lokala minimo bat da)

- 7) Ikatz mehategi batean Q langilez osatutako lan-taldeak daude, eta ekoizpena honelakoa da:

$$P = \frac{3}{25} \cdot Q^2 - \frac{1}{300} \cdot Q^3 \quad (\text{tona})$$

Lan-talde bakoitzean aritu beharreko langile kopurua zehaztu:

a) ekoizpena maximotzeko

b) batez besteko ekoizpena maximotzeko ($P_{BB} = P/Q$)

Er: 24 langile, ekoizpena maximotzeko ; 18 langile, batez besteko ekoizpena maximotzeko

- 8) Enpresa baten kostu aldakorren funtzioa, astean ekoiztutako aparailu-kopuruaren (q) arabera, honakoa da: $K_A = \frac{2}{5}q^2 + 30q$ (€). Enpresaren kostu finkoak, astero, 1000 €koak dira.

Batez besteko kostua minimotzeko ekoizpena kalkulatu ($K_{BB} = K/q$). Frogatu batez besteko kostua minimoa dela kostu marjinalarekin berdintzen denean.

Er: $q = 50$ (unitate / astea) $\xRightarrow{q=50} K_{BB} = 70 = K_{MA}$

- 9) Enpresa batek ekoizten duen ondasunaren prezio errentagarriena bilatzen du, horretarako merkatua aztertzen du eta $q = 1000 - 20p$ funtzio lineala betetzen dela estimatzen du, bertan q izanik hileroko eskaria (unitateetan), eta p ondasunaren prezioa (eurotan). Hileroko kostu finkoak 3600 €koak direla estimatzen da, eta kostu aldakorak $0,6 \cdot q$ €koak. Kalkulatu zenbat unitate saldu behar diren enpresaren mozkinak maximotzeko, eta zein preziotan salduko diren.

Er: 494 unitate hilabeteetan, 25,30 €ko prezioan unitatea



- 10) Enpresa batek ekoizten duen artikularen unitate bakoitza 3 €tan saltzen du. Kostu totalen funtzioa, egunero egiten diren unitateen arabera, hau da: $C = 0,005q^2 + q + 60$ (€)

Eguneko ekoizpena kalkulatu mozkin maximotzeko. Zenbatekoa da mozkin maximoa?

Er: $q=200$ unitate/eguna ; $M_{max}=140$ €/eguna

- 11) Enpresa baten kostu totalen funtzioa, egunean ekoizten diren x unitateen arabera, honakoa

$$\text{da: } C = \frac{1}{3}x^3 - 10x^2 + a \cdot x + 600 \text{ (€)}$$

Merkatuaren eskaria honelakoa da: $x = 37,5 - 0,25 \cdot p$, ondasunaren prezioa p izanik, eta mozkin maximoa 15 unitate saltzerakoan lortzen da. Zein da kostu funtzioaren a koefizientea? eta mozkin maximoa?

Er: $a = 105$; $M_{max}=300$ €/eguna

- 12) Nekazari batek estimatzen du gaurko egunez uzta jaso ezker, 12 tona gari lortuko lituzkeela, eta tona bakoitza 10 eurotan salduko lukeela. Bere estimazioen arabera, uzta atzeratuko balu, aste bakoitzean 2 tonatan handituko litzateke, eta prezioa, euro 1 gutxituko litzateke astero, gari tona bakoitzeko. Uzta egiteko zenbat denbora itxaron behar duen kalkulatu, sarrerak maximotzeko.

Er: 2 astez itxaron behar du uzta jasotzeko

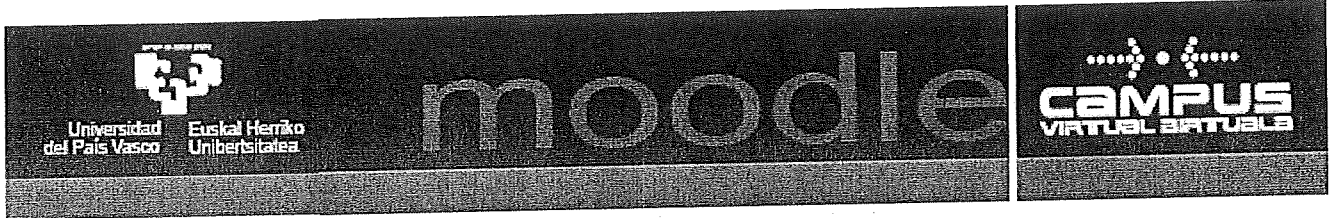
- 13) Metro karratu bateko azalera edukiko duen leiho baterako markoa egin behar da, eta markoa egiteko materialak honako kostuak ditu, metro luzera bakoitzeko:

14,40 €/m. , markoaren zati bertikalean

10,00 €/m. , markoaren zati horizontalean

Kostua minimotzen duen markoaren dimentsioa kalkulatu.

Er: $zabalera = 1,20$ metro ; $altuera \approx 0,84$ metro



moodle ► 251_EMPRE302_08308_32 ► Galdetegiak ► Hoberenatze baldintzatua ► 1 saiakera

[Galdetegi eguneratu](#)[Informazioa](#)[Emailtzak](#)[Aurreikusi](#)[Editatu](#)

Hoberenatze baldintzatua aurreikusi

[Hasi berriro](#)

Oharra: zure ikasleek ezin dute eskuratu orain galdetegi hau

1Puntuak:
--/10

Enpresa batek artikulu bat egiteko bi faktore erabiltzen ditu, x eta y kopuruetan, eta $Q(x,y)=2x+y$ funtzioak adierazten du ekoiztutako unitate kopurua.

Kostu totalen funtzioa, berriz, honakoa da: $C(x,y)=x^2+y^2+200$ (€).

Kostuak ordaintzeko 605 € erabilita, zein da faktore konbinaziorik hoberena ekoizpena maximizatzeko?

Puntu honetan maximo lokal bat dago:

Aukeratu
erantzun
bat

- ☐ A. Ez dago maximo lokalik
- ☐ B. $(x,y)=(18,9)$ puntuan
- ☐ C. $(x,y)=(9,18)$ puntuan
- ☐ D. $(x,y)=(20,10)$ puntuan

[Bidali](#)**2**Puntuak:
--/10

Problemaren irudia egiten bada, lortutako maximo lokala, globala ere badela ziurta daiteke:

Aukeratu
erantzun
bat

- ☐ A. Maximo globalerako ariketa ez-bornatua da
- ☐ B. Bai

- ☐ C. Irudiak ez du informazio nahikorik ematen
- ☐ D. Ez

Bidali

3

Puntu hoberenean lortzen den ekoizpen maximoa honakoa da:
(soilik zenbaki zuzena idatzi)

Puntuak:
--/10

Erantzuna:

Bidali

4

623 € erabilgarri edukitzekotan, ekoizpen-maila hoberen berria hau litzateke, gutxi gora behera (Lagrangeren biderkatzailea erabili):

Puntuak:
--/10

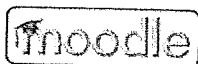
- Aukeratu erantzun bat
- ☐ A. 45 unitate
- ☐ B. 50 unitate
- ☐ C. 46 unitate
- ☐ D. 63 unitate

Bidali

Gorde bidali gabe

Orria bidali

Bidali dena eta bukatu



JOSE MARIA ZENDOIA SAINZ barruan da (Irten)

Validate HTML | Section 508 Check | WCAG 1 (2,3) Check

Seigarren gaia: Hoberenatzea aldagai anitzetan (Programazio Lineala)

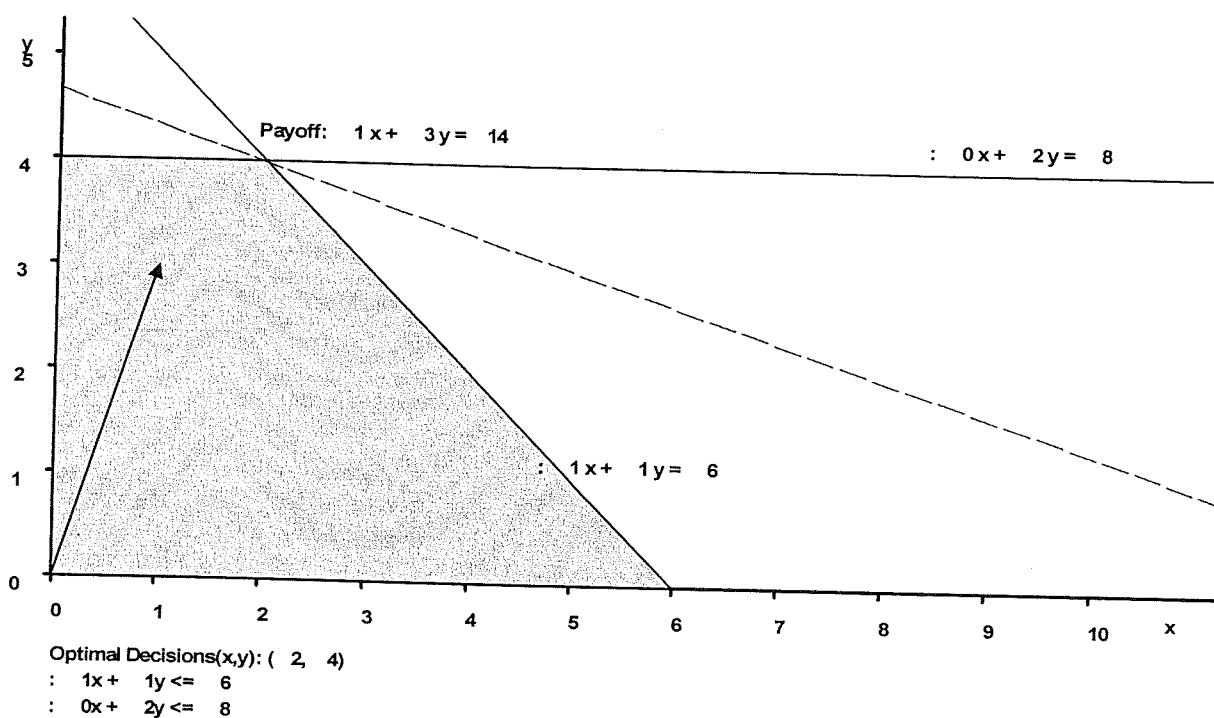
kurba guztiak paraleloak izango dira, eta gradientearekiko elkartutak, beraz $\nabla z = \vec{c} = (c_1, c_2)$ bektoreak adieraziko digu helburu-funtzioa zein norabidetan handitzen doa.

Esaterako:

$$\max z = x + 3y$$

$$\text{o.l.: } \begin{cases} x + y \leq 6 \\ 0x + 2y \leq 8 \end{cases}$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$



Soluzio egingarrien multzoa ilunduta agertzen den eremua da. Helburu-funtzioaren gradientea $(1,3)$ bektorea izanik, eta maila-kurbak $x_1 + 3 \cdot x_2 = K$ zuzenak, soluzio egingarri guztien artean, K handieneko maila kurba $(2,4)$ puntutik pasatzen dena da, beraz, hor egongo da maximoa, eta funtzioak har dezakeen baliorik handiena baldintzak betetzen dituzten puntuen artean, $z^*=14$. Helburu-funtzioaren balio minimoa bilatzen badugu, berriz, $(0, 0)$ puntuan topatuko dugu, bertan $z^*=0$ izango delarik.



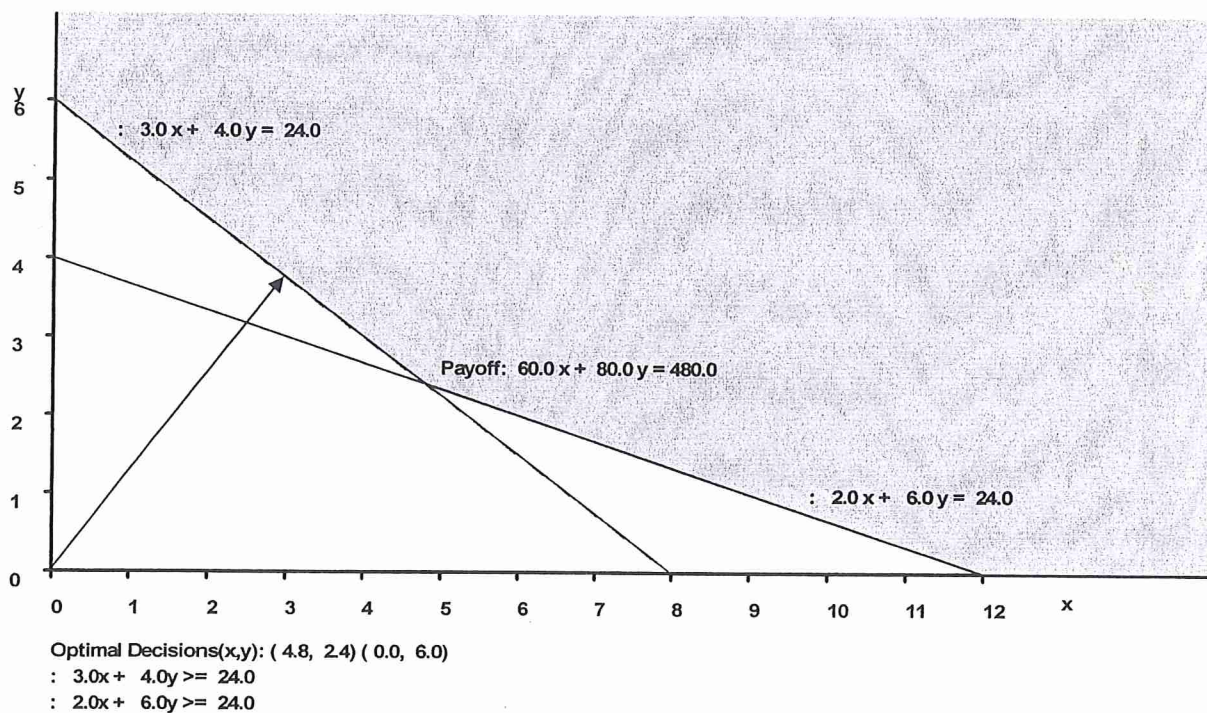
- soluzio anitzak (bi mutur-puntutan eta horien arteko segmentu osoan)

Honen adibide bat:

$$\min z = 60x + 80y$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y \geq 24 \\ \text{o.l.: } 2x + 6y \geq 24 \end{array} \right\}$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$



Minimoak (0,6) eta (4.8 , 2.4) mutur-puntuetan daude, hala nola tarteko puntu guztietan ere, bertan funtzioak $z^*=480$ balio duelarik.

- soluzio anitzak (mutur-puntu batean eta bertatik abiatzen den zuzenerdi batean)

Azken kasu hau ondoko adibidean ikus dezakegu:

$$\min z = 8x - 2y$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x - y \geq 12 \\ \text{o.l.: } 2x + 4y \geq 24 \end{array} \right\}$$

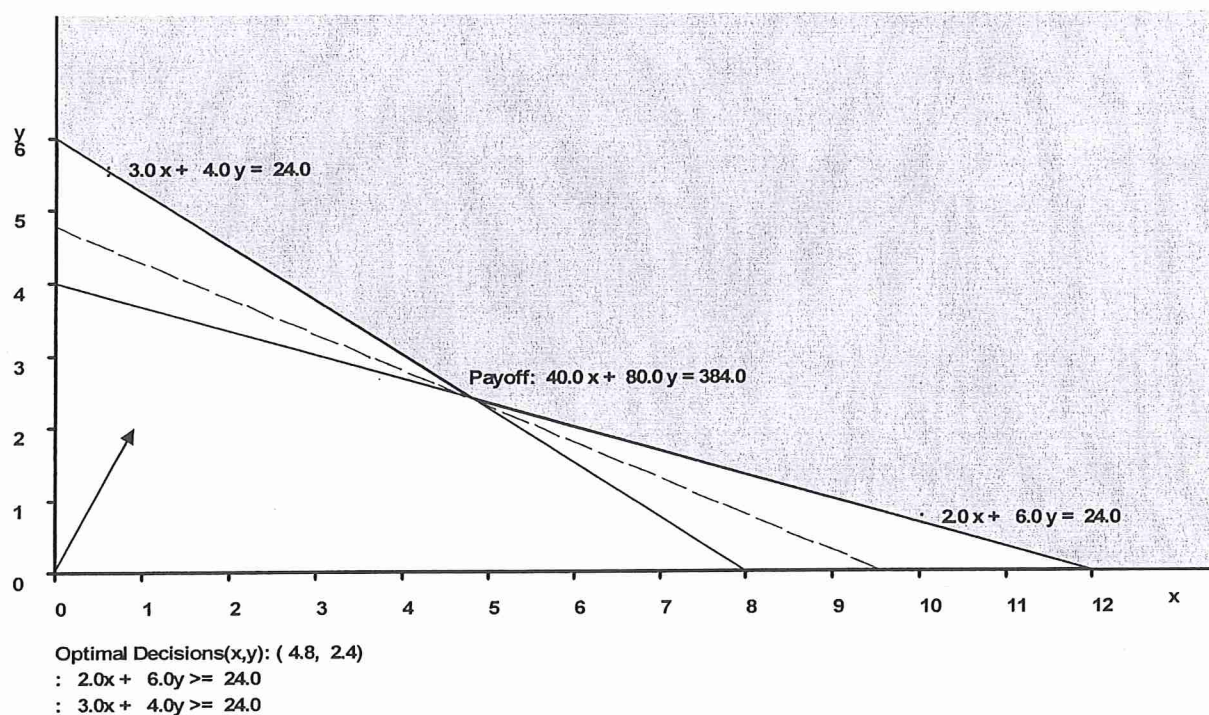
$$x \geq 0, y \geq 0$$

Antzera egingo genuke minimizatzeko ariketa honetan:

$$\min z = 40x + 80y$$

$$\text{o.l.: } \begin{cases} 3x + 4y \geq 24 \\ 2x + 6y \geq 24 \end{cases}$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

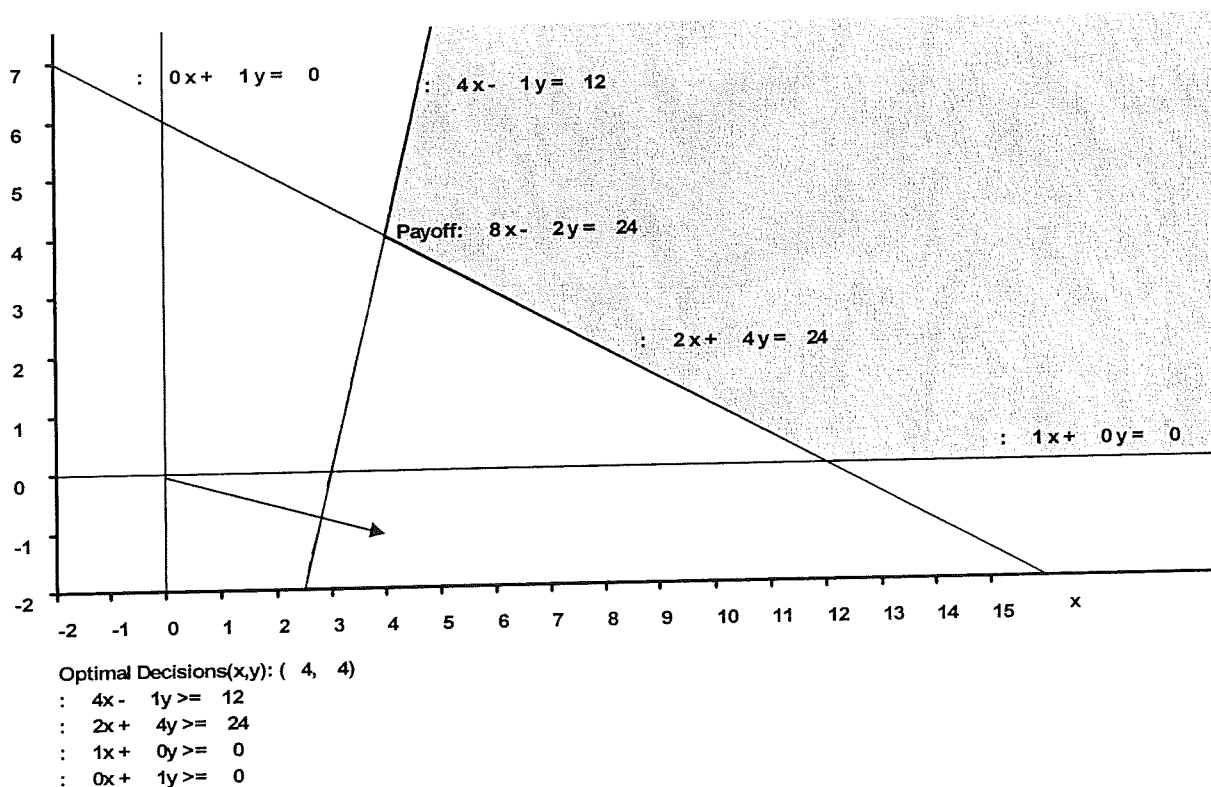


Soluzio egingarrien multzoa ilundutako eremua da. Kasu honetan, gradientea (40, 80) bektorea izanik, haren paraleloa den edozein erabil dezakegu irudian, esaterako $(1, 2) \parallel (40, 80)$ bektorea. Maila-kurbak $4x + 8y = K$ formako zuzenak dira, beraz, helburu-funtzioaren balio minimoa (4.8, 2.4) puntuan aurkituko dugu, bertan funtzioak $z^* = 384$ balioa hartuko duelarik. Maximizatzeko programa izango balitz, ordea, ariketa bornatu gabea da.

3.- Soluzio egingarriak eta mutur-puntuak

Froga daiteke hoberen bat egotekotan, gutxienez soluzio egingarrien multzoaren mutur-puntu batean egongo dela. Honako kasuak topatu daitezke:

- soluzio bakar bat (mutur-puntu batean)



Ikusten denez, minimoa (4,4) puntuan dago, eta baita ere puntu horretatik gora $4x - y = 12$ zuzenaren puntuetan. Puntu guzti horietan funtzioak $z^*=24$ balio du (maximorako bornatu gabea da).

4.- Ebazpenerako Simplex metodoa

Programa linealak bi aldagai baino gehiago baditu, ezin da grafikoaren gainean ebatzi. Kasu honetarako badaude zenbait ebazpen-metodo, horien artean Simplex izenekoa. Algoritmo¹ honen bidez, programa linealaren datuak taula batean sartzen dira, eta bertan mutur-puntu batetik abiatuz (normalean, (0,0) puntutik) hainbat eragiketa egiten dira mutur-puntu hoberena aurkitu arte, edota programa bornatu gabe dela ondorioztatu arte. Eragiketa matrizial hauek egiteko prozedura bibliografiako testu-liburuetan aurkitu daiteke (euskaraz, liburu honetan: *Optimizazioa, Programazio lineala*, Fernández, V. eta Zelaia, A., UEU, 1995).

¹ Algoritmoa: soluzioa aurkitzeko errepikatzen den eragiketa-multzoa.

Harluxet hiztegi entziklopedikoa: iz. MAT. eta INFORM. Problema baten ebazpenerako eman behar diren urratsen deskribapen formalak. Programazio-lengoaia baten bidez, algoritmoa ordenadore batek egikari dezakeen programa bihurtu daiteke.

5.- Dualtasunaren teoria

Programa lineal bati lotuta, bere programa duala planteatu dezakegu. Primala forma kanonikoan idatzita badago:

$$\begin{aligned} \text{maximizatu} \quad & z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \\ \text{ondokoari lotuta:} \quad & \left. \begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &\leq b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &\leq b_2 \\ \dots &\dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &\leq b_m \end{aligned} \right\} \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

bere duala honela idatziko dugu:

$$\begin{aligned} \text{minimizatu} \quad & z' = b_1 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2 + \dots + b_m \cdot u_m \\ \text{ondokoari lotuta:} \quad & \left. \begin{aligned} a_{11} \cdot u_1 + a_{21} \cdot u_2 + \dots + a_{m1} \cdot u_m &\geq c_1 \\ a_{12} \cdot u_1 + a_{22} \cdot u_2 + \dots + a_{m2} \cdot u_m &\geq c_2 \\ \dots &\dots \\ a_{1n} \cdot u_1 + a_{2n} \cdot u_2 + \dots + a_{mn} \cdot u_m &\geq c_n \end{aligned} \right\} \\ & u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, \dots, u_m \geq 0 \end{aligned}$$

Ikusten denez, primalaren murrizketa bakoitzeko aldagai dual bat sortzen da, eta primalaren aldagai bakoitzeko, murrizketa bat dago dualean.

Matrizialki, honela planteatzen dira:

dualaren duala primala da

primala	duala
$\max \quad z = \vec{c}' \cdot \vec{x}$	$\min \quad z' = \vec{b}' \cdot \vec{u}$
$\text{o.l. } A \cdot \vec{x} \leq \vec{b}$	$\text{o.l. } A' \cdot \vec{u} \geq \vec{c}$
$\vec{x} \geq \vec{0}$	$\vec{u} \geq \vec{0}$

Teorema: Primalean maximizatzen dugun z helburu-funtzioak beti hartzen ditu dualaren minimizatze z' helburu-funtzioaren baino balio txikiagoak, programa bakoitzeko soluzio egingarrientzat.

Frogapena: Bitez $\vec{x}$ eta $\vec{u}$ primalaren eta dualaren soluzio egingarriak, hurrenez hurren. (Kontutan hartu $A' \cdot \vec{u} \geq \vec{c}$ desberdintza iraulita $\vec{u}' \cdot A \geq \vec{c}'$ dela, eta $z' = \vec{b}' \cdot \vec{u}$ beste hau: $z' = \vec{u}' \cdot \vec{b}$). Ondoko erlazioa betetzen da: $z = \vec{c}' \cdot \vec{x} \leq \vec{u}' \cdot A \cdot \vec{x} \leq \vec{u}' \cdot \vec{b} = z'$, frogatu nahi genuen bezala.



Emaizta horren lehen ondorioa zera da: programetako bat bornatu gabea bada, besteak ez du soluziorik. Bestalde, frogatu daiteke primalak soluzioa duenean dualak ere edukiko duela, eta bietan helburu funtzioaren balioa bera izango dela. Hau da, $\vec{x}^*$ eta $\vec{u}^*$ badira primalaren eta dualaren hoberenak, hurrenez hurren, orduan: $z^* = \vec{c}' \cdot \vec{x}^* = \vec{u}^{*'} \cdot A \cdot \vec{x}^* = \vec{u}^{*'} \cdot \vec{b} = z'^*$.

Lasaitze osagarriaren teorema: primalak eta dualak soluzio hoberena badute, primalaren murrizketa bat ase gabe badago hoberenean, dualean dagokion aldagaiaren balio hoberena zero da, eta primalaren aldagai baten balio hoberena hertsiki positiboa bada, dualean dagokion murrizketa ase dago hoberenean.

Era berean, dualaren murrizketa bat ase gabe badago hoberenean, primalean dagokion aldagaiaren balio hoberena zero da, eta dualaren aldagai baten balio hoberena hertsiki positiboa bada, primalean dagokion murrizketa ase dago hoberenean.

Frogapena:

Bitez $\vec{x}^*$ eta $\vec{u}^*$ primalaren eta dualaren soluzio hoberenak, hurrenez hurren, honakoa beteko da:

$z^* = \vec{c}' \cdot \vec{x}^* = \vec{u}^{*'} \cdot A \cdot \vec{x}^* = \vec{u}^{*'} \cdot \vec{b} = z'^*$, eta hemendik honako bi berdintzak erabiliko ditugu:

$\vec{c}' \cdot \vec{x}^* = \vec{u}^{*'} \cdot A \cdot \vec{x}^*$ alde batetik, eta $\vec{u}^{*'} \cdot A \cdot \vec{x}^* = \vec{u}^{*'} \cdot \vec{b}$ bestetik.

- $\vec{c}' \cdot \vec{x}^* = \vec{u}^{*'} \cdot A \cdot \vec{x}^* \Rightarrow (\vec{c}' - \vec{u}^{*'} \cdot A) \cdot \vec{x}^* = 0$, eta biderkadura matritzial hau garatuko bagenu:

$$(c_1 - (u_1^* \cdot a_{11} + \dots + u_m^* \cdot a_{m1})) \cdot x_1^* + \dots + (c_n - (u_1^* \cdot a_{1n} + \dots + u_m^* \cdot a_{mn})) \cdot x_n^* = 0$$

Murrizketa dual bakoitza $(c_j - (u_1^* \cdot a_{1j} + \dots + u_m^* \cdot a_{mj})) \leq 0$ izango da, eta aldagai primal bakoitza $x_j^* \geq 0$ ($\forall j = 1, \dots, n$), beraz, baturak zero eman dezan, batugai guztiek zero balio behar dute:

- Murrizketa bat ase gabe badago dualean, edo beste modu batez esanda, forma estandarrean lasaitze-aldagaiaren balio hoberena positiboa bada, $(c_j - (u_1^* \cdot a_{1j} + \dots + u_m^* \cdot a_{mj})) < 0$, dagokion aldagai primalak $x_j^* = 0$ bete beharko du.
- Arrazoi beragatik, aldagai primal baten balio hoberena hertsiki positiboa bada: $x_j^* > 0$, orduan dualean dagokion murrizketak $(c_j - (u_1^* \cdot a_{1j} + \dots + u_m^* \cdot a_{mj})) = 0$ balio beharko du (ase egon, edo programa estandarrean, lasaitze-aldagaiaren balio hoberena zero izan).

- $\vec{u}^{*'} \cdot A \cdot \vec{x}^* = \vec{u}^{*'} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{u}^{*'} \cdot (A \cdot \vec{x}^* - \vec{b}) = 0$ beteko da, eta emaitza hau garatuz:

$$u_1^* \cdot ((a_{11} \cdot x_1^* + \dots + a_{1n} \cdot x_n^*) - b_1) + \dots + u_m^* \cdot ((a_{m1} \cdot x_1^* + \dots + a_{mn} \cdot x_n^*) - b_m) = 0$$



Murrizketa primal bakoitza $((a_{i1} \cdot x_1^* + \dots + a_{in} \cdot x_n^*) - b_i) \leq 0$ izango da, eta aldagai dual bakoitza $u_i^* \geq 0$ ($\forall i = 1, \dots, m$), beraz, baturak zero eman dezan, batugai guztiek zero balio beharko dute:

- Murrizketa bat ase gabe badago primalean $((a_{i1} \cdot x_1^* + \dots + a_{in} \cdot x_n^*) - b_i) < 0$, dagokion aldagai dualak $u_i^* = 0$ bete beharko du.
- Era berean, aldagai dual baten balio hoberena hertsiki positiboa bada: $u_i^* > 0$, orduan primalean dagokion murrizketak $((a_{i1} \cdot x_1^* + \dots + a_{in} \cdot x_n^*) - b_i) = 0$ bete beharko du (ase egon, edo forma estandarreko lasaitze-aldagaia nulua izan).

Emaitza hau erabiliz, primalaren (edo dualaren) soluzioa ezagututa, bestearen soluzioa aurki dezakegu.

Dualaren soluzioaren esanahi ekonomikoa:

Hoberenean $z^* = \vec{c}' \cdot \vec{x}^* = \vec{u}^*{}' \cdot A \cdot \vec{x}^* = \vec{u}^*{}' \cdot \vec{b} = z'^*$ egiaztatzen denez:

$\frac{\partial z^*}{\partial \vec{b}} = \vec{u}^* \Rightarrow \frac{\partial z^*}{\partial b_i} = u_i^*$, hau da, i -garren aldagai dualaren balio hoberenak adierazten digu helburu-funtzioaren aldaketa-tasa (egoera hoberenean), b_i aldatzen denean (i . murrizketaren baldintza aldatzen denean).

Programa primala mozkinak maximizatzeko ariketa bat bada, hainbat murrizketa teknikori lotuta, aldagai dualek adierazten dute murrizketa tekniko horiek baldintzatzen duten prozesuetako baliabideen prezio ezkutua (aukera kostu moduan ere azter daitezkeenak, edo sarrera marjinal gisa). Programa kostuak minimizatzeko ariketa izanik, eskakizun minimo batzuk hornitu behar direnean, aldagai dualen balio hoberenek adierazten dute eskakizun horietako bakoitzaren kostu marjinalak.

6.- Ariketen ebazpena Lindo programa informatikoaren bidez

Programa linealak ebazteko Simplex metodoaz gain, antzeko algoritmoek erabiltzen dituzte hainbat programa informatikok, esaterako, Lindo izenekoak (Linear Interactive aNd Discrete Optimizer). Tamaina handiko ariketak ebazteko oso erabilgarria da.

Bertan, helburu-funtzioaren eta murrizketen koefizienteak sartu behar dira, eta programak soluzio hoberena kalkulatu du, hala nola programa dualaren soluzioa (lasaitze-aldagaien balioak barne).

Seigarren ikasgaia

1.- Ondoko programa linealak ebatzi, adierazpen grafikoan oinarrituta. Duala idatzi, eta lasaitze-osagarriaren bidez ebatzi (grafikoki ere).

a) $\max x + 3y$	b) $\min 6x + 8y$	c) $\max 3x - 3y$	d) $\max x + 3y$
$x + y \leq 6$	$3x + y \geq 4$	$x + 2y \leq 8$	$x - 2y \leq 4$
o.l. $x - 2y \geq -8$	o.l. $5x + 2y \geq 7$	o.l. $3x - y \leq 3$	o.l. $-x + y \leq 3$
$x \geq 0, y \geq 0$	$x \geq 0, y \geq 0$	$x \geq 0, y \geq 0$	$x \geq 0, y \geq 0$

2.- Gozotegi batean bi opil mota egiten dituzte, A eta B, eta horretarako 150 k. irin, 22 k. azukre eta 27,5 k. gurin dauzkate. A motako opil dozena bat egiteko 3 k. irin, kilo bat azukre eta beste bat gurina erabiltzen dira, B motako opil dozena egiteko, berriz, 6 kilo, kilo erdia eta kilo bat behar dira, hurrenez hurren. A motako opil dozena bat saltzeagatik 20 €ko irabazia lortzen da, eta B motako opil dozena bakoitzeko, 30 €. Zenbat dozena egin behar dira opil mota bakoitzeko, mozkinak maximizatu nahi badira?

3.- Elikadura-enpresa batek bi osagai nahastuz elikagai bat egiten du. Osagaiak proteina iturri bat (P) eta karbohidrato iturri bat (K) dira. Enpresak 200 k. egiteko eskaria du. P osagaiak 3 m.u./k. kostatzen zaio enpresari, eta K osagaiak 8 m.u./k. Elikagaiak gehienera %40a eduki dezake P osagaiaz, eta gutxienez %30 K osagaiaz. Zenbat erabili behar da osagai bakoitzaz kostua minimizatzeko? Dualaren esanahia aztertu.

4.- Enpresa batek bi ondasun ekoizten ditu, I eta II. Bi lantegi ditu, eta bakoitzean ordubeteko ekoizpena taula honetan agertzen da (unitateak/ordua):

	1. lantegia	2. lantegia
I ondasuna	10	20
II ondasuna	25	25

Enpresak jaso duen eskari baten arabera, I ondasuneko 300 unitate egin behar ditu, eta II ondasuneko 500. Lehen lantegian ekoizpen ordu batek 10.000 €ko kostua du, eta bigarren lantegiko ordu baten kostua 8.000 €koa da. Zein da mozkinak minimizatzeko ekoizpen konbinazio egokiena?



5.- Baserri bateko oilaskoek egunean, gutxienez, 24 burdin-unitate eta 8 bitamina-unitate jan behar dituzte. Arto zakuak 2 burdin-unitate eta 5 bitamina-u. ematen ditu, hezur-irin zakuak 4 burdin-u. eta bitamina-u. 1, eta pentsu zakuak 2 burdin-u. eta bitamina-u. 1. Zaku bakoitzaren kostua 40, 20 eta 60 € bada hurrenez hurren,

- a) zein da kostua minimizatzen duen elikagai nahasketa?
- b) Dualaren bidez ebatzi, eta dualaren esanahi ekonomikoa aztertu.

6.- Enpresa batek bi produktu (P_1 eta P_2) egiten ditu bi lantegietan (L_A eta L_B). P_1 -en unitate bakoitza ekoizten L_A lantegiaren 2 ordu erabiltzen ditu, eta 8 ordu L_B lantegian. P_2 -ren unitate bakoitzak L_A -n 3 ordu behar ditu eta L_B -n, 6. L_A lantegiak hilabeteko 1.200 ordutako ahalmena du, eta L_B lantegiak, 3.000 ordutakoa. P_1 -en hilabeteko eskaria ez da 300 unitatekoa baino handiagoa eta P_2 -rena ez da 350 unitatekoa baino handiagoa. P_1 eta P_2 -ren mozkin unitarioak 7 m.u. eta 2 m.u.koak badira, hurrenez hurren:

- a) Mozkina maximizatzen duen produktuen konbinazioa aurkitu.
- b) P_1 produktuaren eskaria hileko unitate batean handituko balitz, eta P_1 -en unitate gehigarri bat ekoizteko kostua 3 m.u.koa bada, enpresari interesatuko al zaio eskariaren gehikuntza betetzea? Baldintza horiek P_2 -rentzat gertatzen badira, zer egingo du enpresak?

7.- Enpresa txiki batek hiru langile ditu, bakoitzak astean 40 lanordu egiten dituelarik A eta B produktuak ekoizten. A unitate bat egiteko hiru lanordu behar dira eta B-ren unitate bakoitzak, 4 lanordu behar ditu. Erabakita dago astean ez direla A produktuaren 32 unitate baino gehiago egingo, ez eta B produktuaren 12 unitate baino gehiago ere. A produktuaren unitate bakoitzak 6 m.u.ko mozkina ematen du, eta B-ren unitate bakoitzak, 3 m.u. Astean produktu bakoitzetik zenbat unitate ekoiztu behar diren kalkulatu mozkina maximizatzeko. Zenbatean ordaindu daiteke gehienera aparteko lanordu bat, enpresarentzat errentagarria izan dadin? Zein eragin edukiko luke ekoizpenean merkatuan B produktuaren 13 unitate saldu daitezkeela jakiteak?

8.- Ibaetako tailer batean hiru motako txirrinduak prestatzen dituzte, hirikoak, mendikoak eta karreratakoak. Bakoitzaren mozkina 15, 20, eta 24 €koak dira, hurrenez hurren. Bi prozesu daude:



koadroa muntatu (A) eta osagai guztiak doitu (B). Txirrindu mota bakoitzak honako beharrak ditu, lanordutan:

	Hirikoa	Mendikoa	Karreratakoa
A	3	1	3
B	1	5	2

Koadroak muntatzeko 120 ordu erabilgarri daude, eta osagaiak doitzeko, 60 ordu.

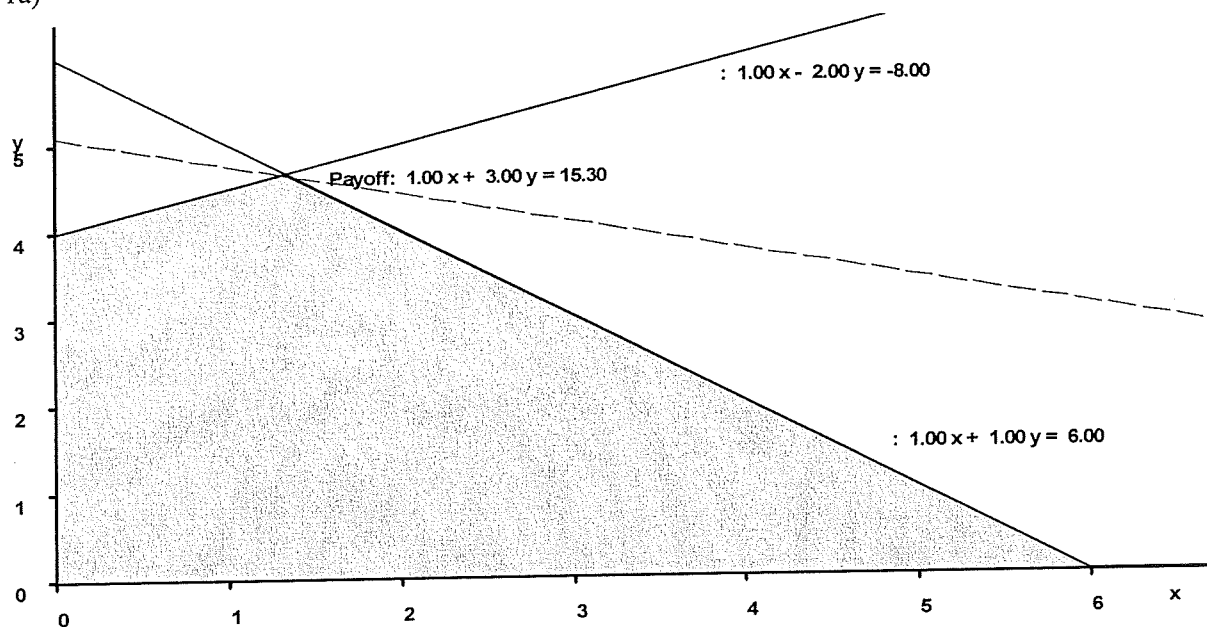
- Mozkinak maximizatzeko txirrindu mota bakoitzetik prestatu beharreko unitateak kalkulatu.
- Aztertu mozkinetan gertatzen den aldaketa, A prozesuan 121 lanordu erabilgarri izatera pasatzen bada.

Seigarren ikasgaia

1.- Ondoko programa linealak ebatzi, adierazpen grafikoan oinarrituta. Duala idatzi, eta lasaitze-osagarriaren bidez ebatzi (grafikoki ere).

a) max $x + 3y$	b) min $6x + 8y$	c) max $3x - 3y$	d) max $x + 3y$
$x + y \leq 6$	$3x + y \geq 4$	$x + 2y \leq 8$	$x - 2y \leq 4$
o.l. $x - 2y \geq -8$	o.l. $5x + 2y \geq 7$	o.l. $3x - y \leq 3$	o.l. $-x + y \leq 3$
$x \geq 0, y \geq 0$	$x \geq 0, y \geq 0$	$x \geq 0, y \geq 0$	$x \geq 0, y \geq 0$

1a)



Optimal Decisions(x,y): (1.33, 4.67)
 : $1.00x + 1.00y \leq 6.00$
 : $1.00x - 2.00y \geq -8.00$

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 15.33333

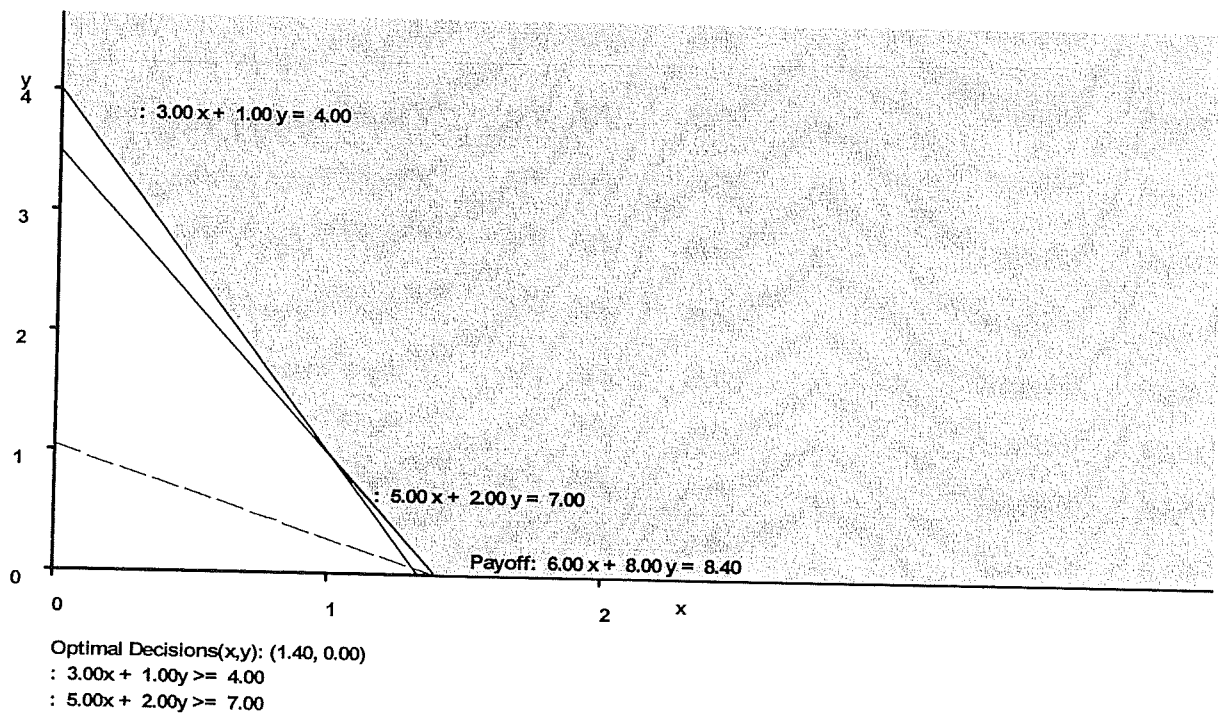
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X	1.333333	0.000000
Y	4.666667	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	1.666667
3)	0.000000	-0.666667

NO. ITERATIONS= 2



1b)



LP OPTIMUM FOUND AT STEP 1

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 8.400000

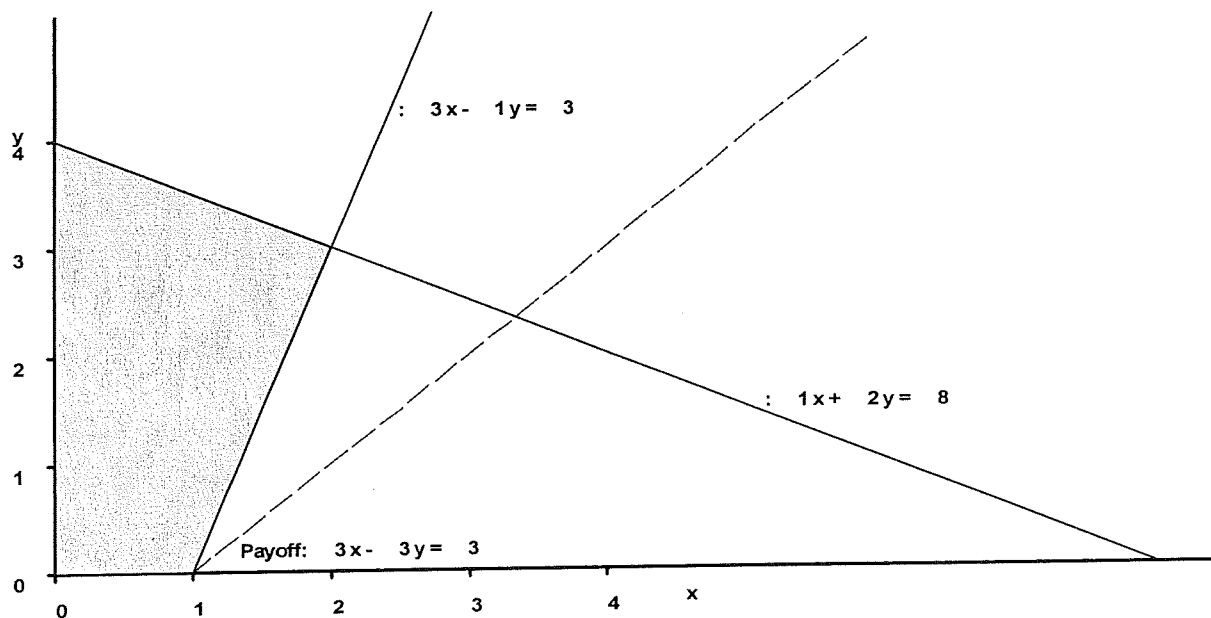
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X	1.400000	0.000000
Y	0.000000	5.600000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.200000	0.000000
3)	0.000000	-1.200000

NO. ITERATIONS= 1



1c)



erabaki hoberena: $(x,y) = (1,0)$

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 3.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
----------	-------	--------------

X	1.000000	0.000000
---	----------	----------

Y	0.000000	2.000000
---	----------	----------

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
-----	------------------	-------------

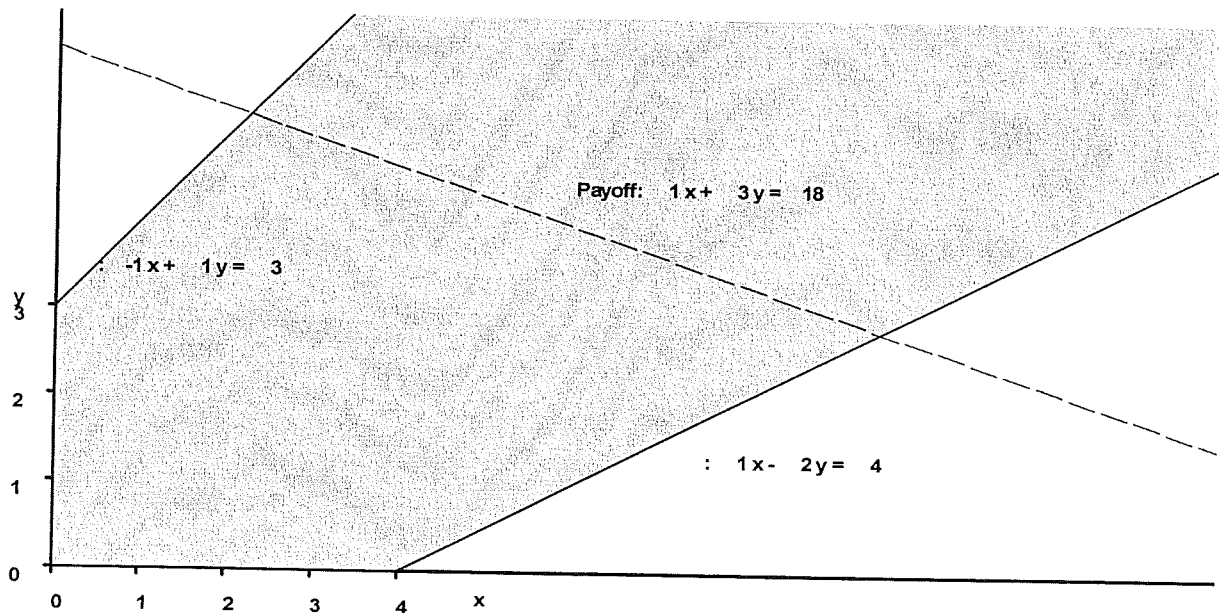
2)	7.000000	0.000000
----	----------	----------

3)	0.000000	1.000000
----	----------	----------

NO. ITERATIONS= 0



1d)



(ez bornatua)

UNBOUNDED VARIABLES ARE:

Y

X

SLK 3

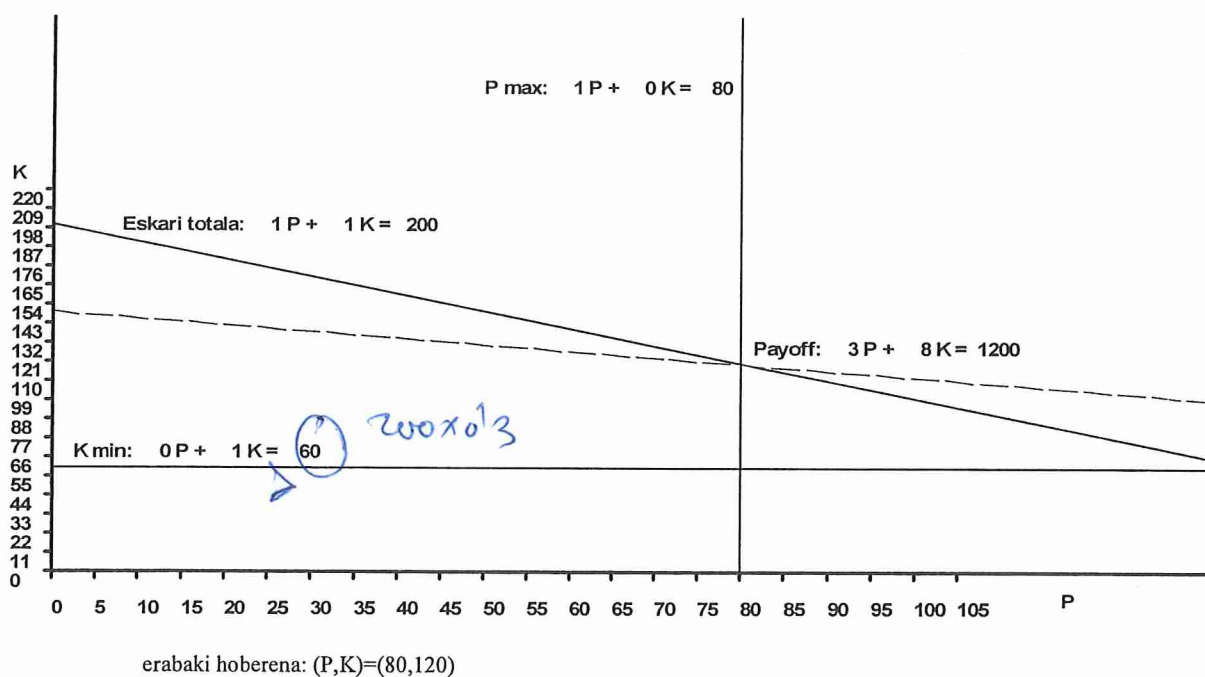
OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 0.9999990E+08

(Ez bornatua)



3.- Elikadura-enpresa batek bi osagai nahastuz elikagai bat egiten du. Osagaiak proteina iturri bat (P) eta karbohidrato iturri bat (K) dira. Enpresak 200 k. egiteko eskaria du. P osagaiak 3 m.u./k. kostatzen zaio enpresari, eta K osagaiak 8 m.u./k. Elikagaiak gehienera %40a eduki dezake P osagaiaz, eta gutxienez %30 K osagaiaz. Zenbat erabili behar da osagai bakoitzaz kostua minimizatzen? Dualaren esanahia aztertu.



LP OPTIMUM FOUND AT STEP 1

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 1200.000

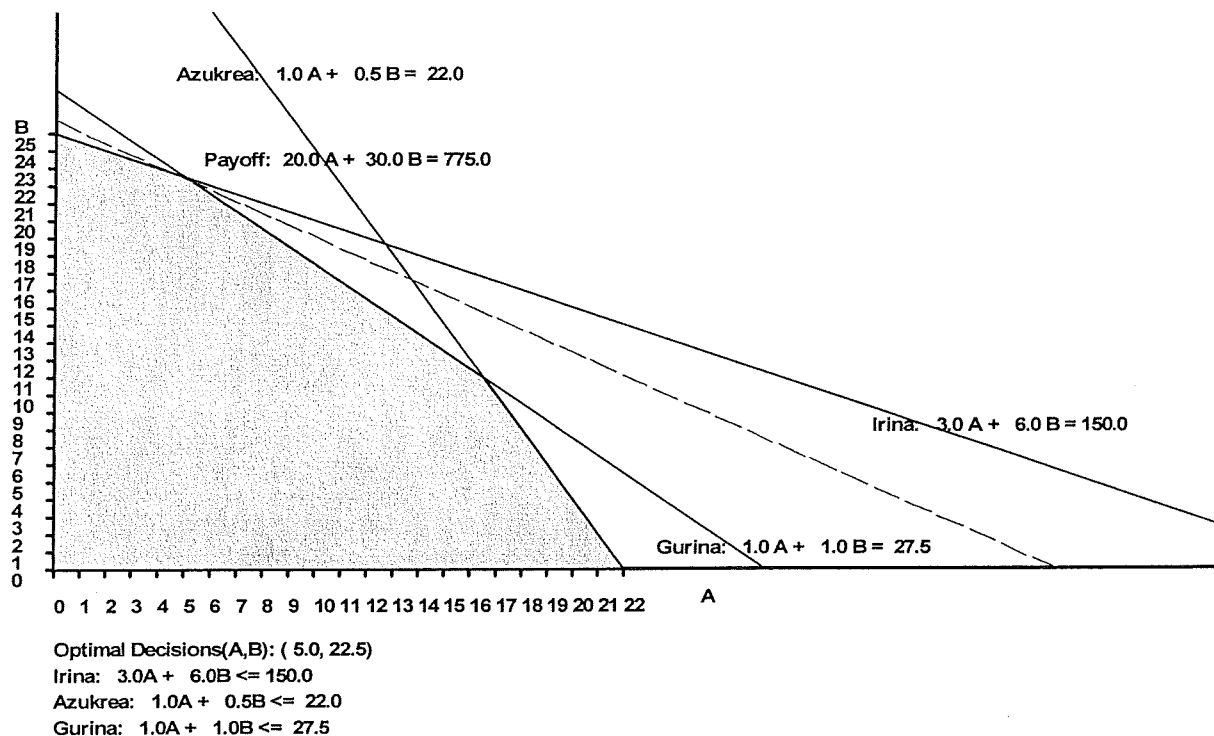
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
P	80.000000	0.000000
K	120.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	-8.000000
3)	0.000000	5.000000
4)	60.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 1



2.- Gozotegi batean bi opil mota egiten dituzte, A eta B, eta horretarako 150 k. irin, 22 k. azukre eta 27,5 k. gurin dauzkate. A motako opil dozena bat egiteko 3 k. irin, kilo bat azukre eta beste bat gurina erabiltzen dira, B motako opil dozena egiteko, berriz, 6 kilo, kilo erdia eta kilo bat behar dira, hurrenez hurren. A motako opil dozena bat saltzeagatik 20 €ko irabazia lortzen da, eta B motako opil dozena bakoitzeko, 30 €. Zenbat dozena egin behar dira opil mota bakoitzeko, mozkinak maximizatu nahi badira?



LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 775.0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
A	5.000000	0.000000
B	22.500000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	3.333333
3)	5.750000	0.000000
4)	0.000000	10.000000

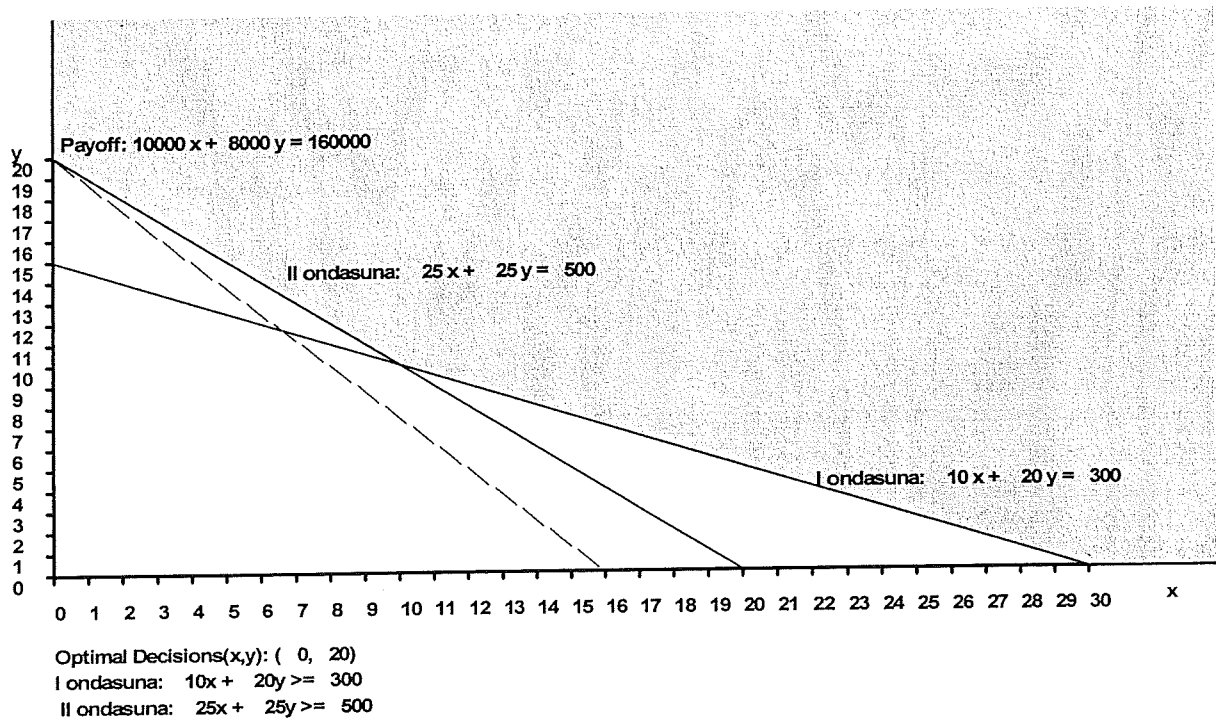
NO. ITERATIONS= 2



4.- Enpresa batek bi ondasun ekoizten ditu, I eta II. Bi lantegi ditu, eta bakoitzean ordubeteko ekoizpena taula honetan agertzen da (unitateak/ordua):

	1. lantegia	2. lantegia
I ondasuna	10	20
II ondasuna	25	25

Enpresak jaso duen eskari baten arabera, I ondasuneko 300 unitate egin behar ditu, eta II ondasuneko 500. Lehen lantegian ekoizpen ordu batek 10.000 €ko kostua du, eta bigarren lantegiko ordu baten kostua 8.000 €koa da. Zein da kostuak minimizatzeko ekoizpen konbinazio egokiena?



LP OPTIMUM FOUND AT STEP 1

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 160000.0

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X	0.000000	2000.000000
Y	20.000000	0.000000

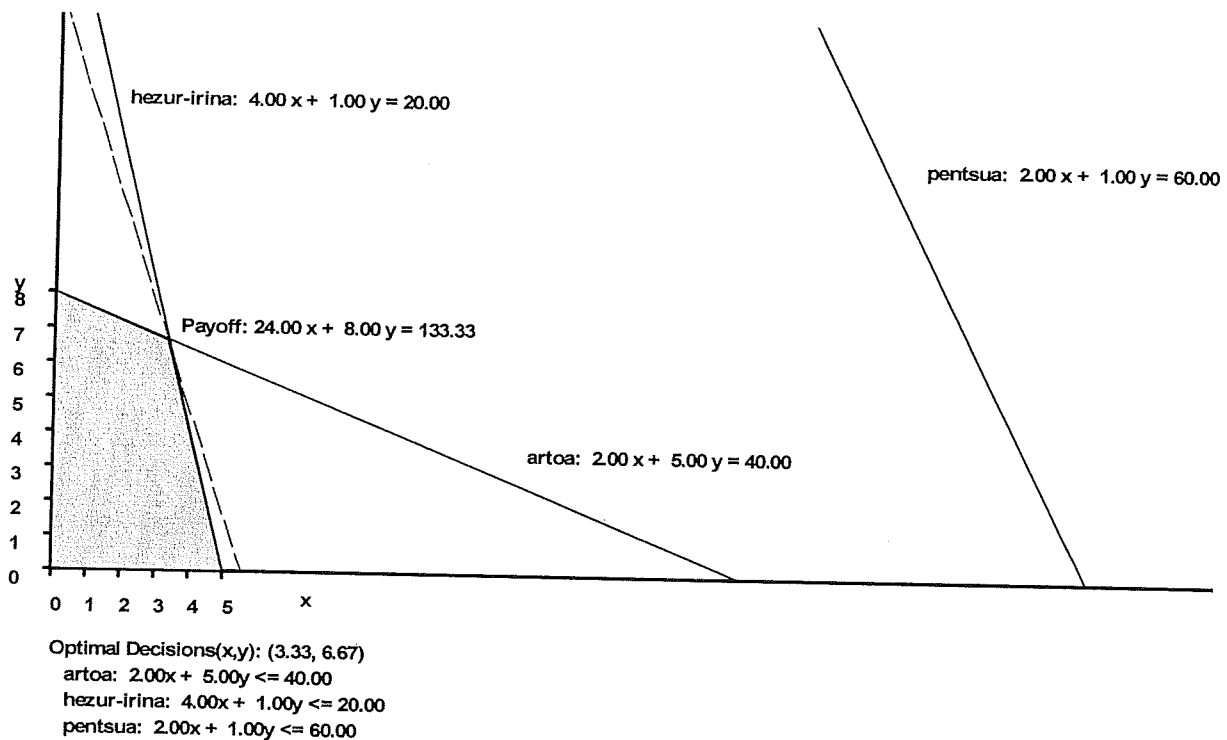
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	100.000000	0.000000
3)	0.000000	-320.000000

NO. ITERATIONS= 1



5.- Baserri bateko oilaskoek egunean, gutxienez, 24 burdin-unitate eta 8 bitamina-unitate jan behar dituzte. Arto zakuak 2 burdin-unitate eta 5 bitamina-u. ematen ditu, hezur-irin zakuak 4 burdin-u. eta bitamina-u. 1, eta pentsu zakuak 2 burdin-u. eta bitamina-u. 1. Zaku bakoitzaren kostua 40, 20 eta 60 € bada hurrenez hurren,

- zein da kostua minimizatzen duen elikagai nahasketa?
- Dualaren bidez ebatzi, eta dualaren esanahi ekonomikoa aztertu.



LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 133.3333

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
A	0.444444	0.000000
H	5.777778	0.000000
P	0.000000	46.666668

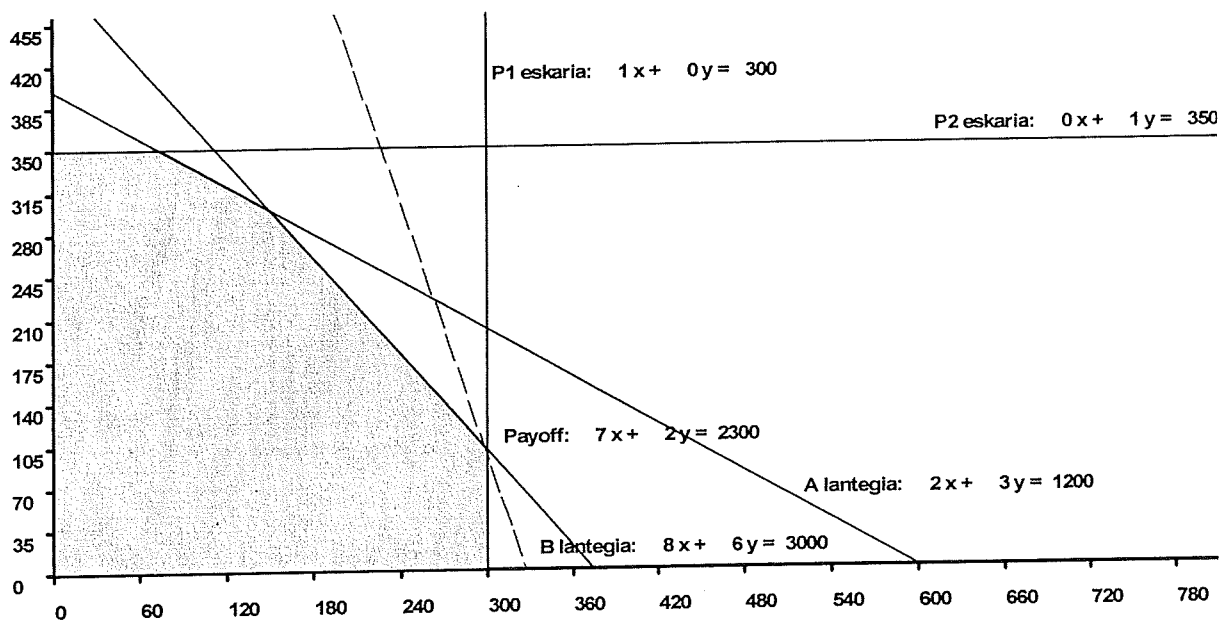
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	-3.333333
3)	0.000000	-6.666667

NO. ITERATIONS= 2



6.- Enpresa batek bi produktu (P_1 eta P_2) egiten ditu bi lantegietan (L_A eta L_B). P_1 -en unitate bakoitza ekoizten L_A lantegiaren 2 ordu erabiltzen ditu, eta 8 ordu L_B lantegian. P_2 -ren unitate bakoitzak L_A -n 3 ordu behar ditu eta L_B -n, 6. L_A lantegiak hilabeteko 1.200 ordutako ahalmena du, eta L_B lantegiak, 3.000 ordutakoa. P_1 -en hilabeteko eskaria ez da 300 unitatekoa baino handiagoa eta P_2 -rena ez da 350 unitatekoa baino handiagoa. P_1 eta P_2 -ren mozkin unitarioak 7 m.u. eta 2 m.u.koak badira, hurrenez hurren:

- Mozkina maximizatzen duen produktuen konbinazioa aurkitu.
- P_1 produktuaren eskaria hileko unitate batean handituko balitz, eta P_1 -en unitate gehigarri bat ekoizteko kostua 3 m.u.koa bada, enpresari interesatuko al zaio eskariaren gehikuntza betetzea? Baldintza horiek P_2 -rentzat gertatzen badira, zer egingo du enpresak?



Optimal Decisions(x,y): (300, 100)

A lantegia: $2x + 3y \leq 1200$

B lantegia: $8x + 6y \leq 3000$

P1 eskaria: $1x + 0y \leq 300$

P2 eskaria: $0x + 1y \leq 350$

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2300.000

VARIABLE VALUE REDUCED COST

X 300.000000 0.000000

Y 100.000000 0.000000

ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES

2) 300.000000 0.000000

3) 0.000000 0.333333

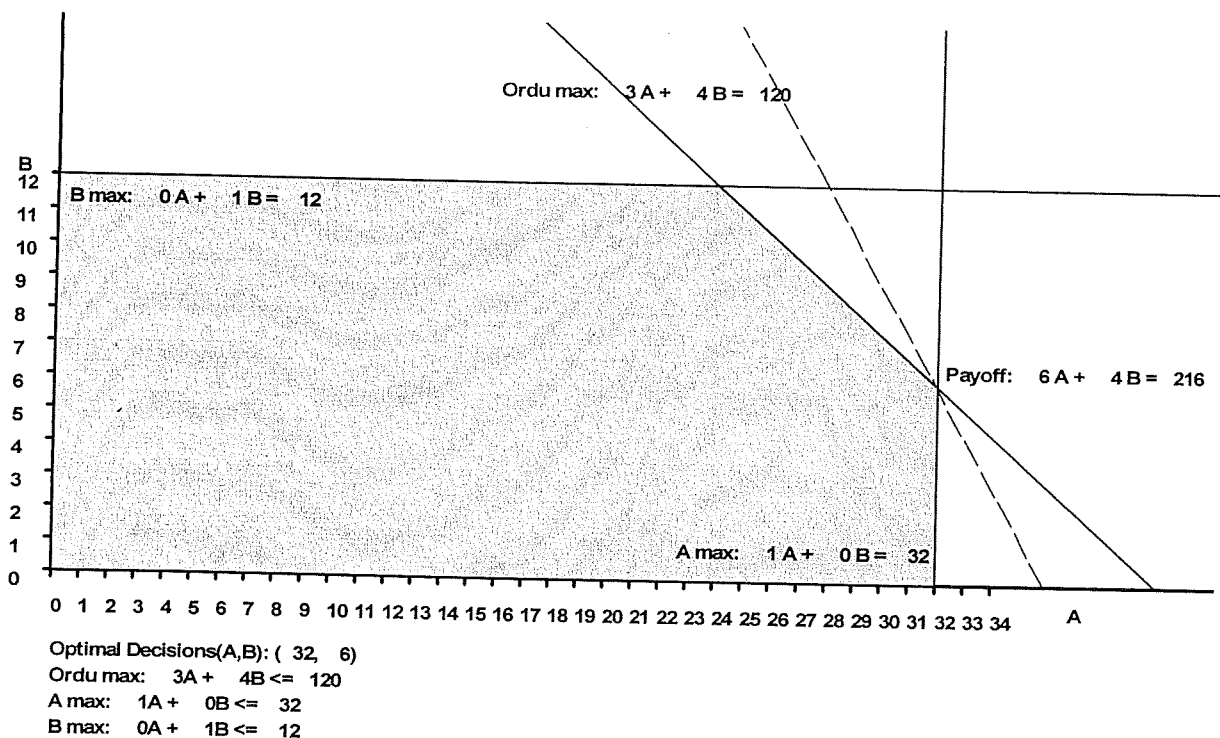
4) 0.000000 4.333333

5) 250.000000 0.000000

NO. ITERATIONS= 2



7.- Enpresa txiki batek hiru langile ditu, bakoitzak astean 40 lanordu egiten dituelarik A eta B produktuak ekoizten. A unitate bat egiteko hiru lanordu behar dira eta B-ren unitate bakoitzak, 4 lanordu behar ditu. Erabakita dago astean ez direla A produktuaren 32 unitate baino gehiago egingo, ez eta B produktuaren 12 unitate baino gehiago ere. A produktuaren unitate bakoitzak 6 m.u.ko mozkina ematen du, eta B-ren unitate bakoitzak, 3 m.u. Astean produktu bakoitzetik zenbat unitate ekoiztu behar diren kalkulatu mozkina maximizatzeko. Zenbatean ordaindu daiteke gehienera aparteko lanordu bat, enpresarentzat errentagarria izan dadin? Zein eragin edukiko luke ekoizpenean merkatuan B produktuaren 13 unitate saldu daitezkeela jakiteak?



LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 216.0000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
A	32.000000	0.000000
B	6.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	1.000000
3)	0.000000	3.000000
4)	6.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 2

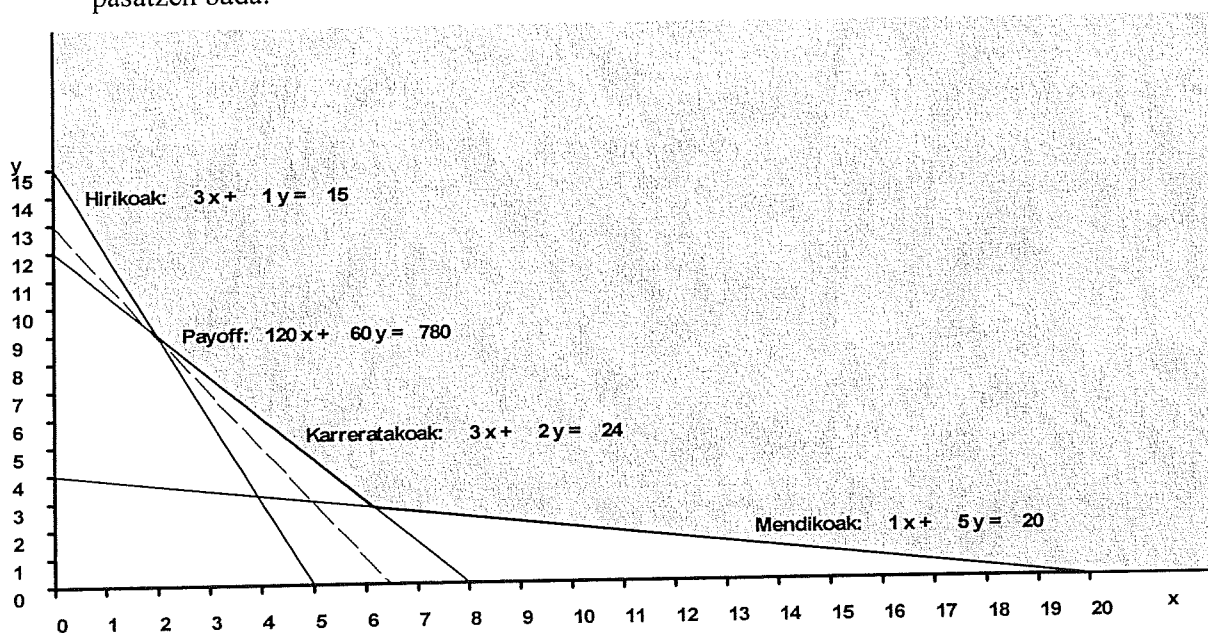


8.- Ibaetako tailer batean hiru motako txirrinduak prestatzen dituzte, hirikoak, mendikoak eta karreratakoak. Bakoitzaren mozkina 15, 20, eta 24 €koak dira, hurrenez hurren. Bi prozesu daude: koadroa muntatu (A) eta osagai guztiak doitu (B). Txirrindu mota bakoitzak honako beharrak ditu, lanordutan:

	Hirikoak	Mendikoak	Karreratakoak
A	3	1	3
B	1	5	2

Koadroak muntatzeko 120 ordu erabilgarri daude, eta osagaiak doitzeko, 60 ordu.

- Mozkinak maximizatzeko txirrindu mota bakoitzetik prestatu beharreko unitateak kalkulatu.
- Aztertu mozkinetan gertatzen den aldaketa, A prozesuan 121 lanordu erabilgarri izatera pasatzen bada.



Optimal Decisions(x,y): (2, 9)

Hirikoak: $3x + 1y \geq 15$

Mendikoak: $1x + 5y \geq 20$

Karreratakoak: $3x + 2y \geq 24$

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 780.0000

ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES

2) 0.000000 2.000000

3) 0.000000 9.000000

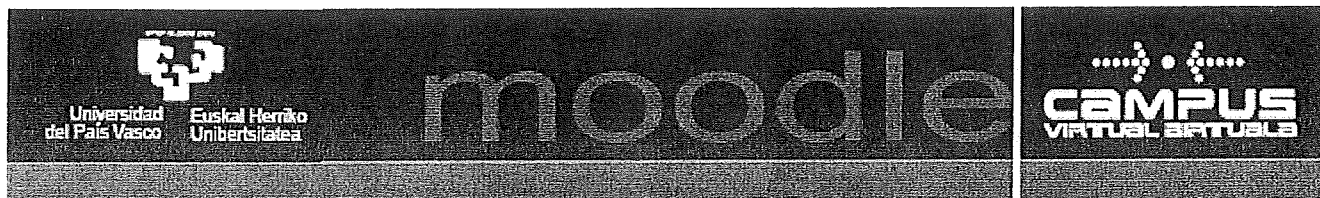
VARIABLE VALUE REDUCED COST

H 20.000000 0.000000

M 0.000000 27.000000

K 20.000000 0.000000

NO. ITERATIONS= 2



moodle ► 251_EMPRE302_08308_32 ► Galdetegiak ► Mozkinak maximizatu (1) ► 1 saiakera

Galdetegi eguneratu

Informazioa E-mailak Aurreikusi Editatu

Mozkinak maximizatu (1) aurreikusi

Hasi berriro

Oharra: zure ikasleek ezin dute eskuratu orain galdetegi hau

1

Puntuak:
--/10

Enpresa batek hiru ondasun ekoizten ditu, bakoitzeko x , y eta z unitate.
Ondasun horien prezioak merkatuan hauek dira: $p_x=16$, $p_y=12$ eta $p_z=20$
€; eta enpresak konkurrentzia osoan saltzen ditu.
Kostu totalen funtzioa honakoa da: $KT(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+2xz+25$ (€)

Mozkinak maximizatzeko zenbat unitate ekoiztu behar dira ondasun bakoitzetik?
Soluzio hoberena bilatu eta ondoko galderei erantzun:

Aukeratu
erantzun
bat

- ☐ A. Mozkinen funtzioa batzuetan ahurra da eta batzuetan ganbila
- ☐ B. Mozkinen funtzioa beti ganbila da
- ☐ C. Mozkinen funtzioa beti ahurra da

Bidali

2

Puntuak:
--/10

Enpresa batek hiru ondasun ekoizten ditu, bakoitzeko x , y eta z unitate.
Ondasun horien prezioak merkatuan hauek dira: $p_x=16$, $p_y=12$ eta $p_z=20$
€; eta enpresak konkurrentzia osoan saltzen ditu.
Kostu totalen funtzioa honakoa da: $KT(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+2xz+25$ (€)

Mozkinak maximizatzeko zenbat unitate ekoiztu behar dira ondasun bakoitzetik?
Soluzio hoberena bilatu eta ondoko galderei erantzun:

Gutxienez
erantzun
bat
aukeratu

- ☐ A. $(x,y,z)=(0,0,0)$ puntu gerakorra da
- ☐ B. $(x,y,z)=(7,3,1)$ puntua maximo lokala da, baina ez globala
- ☐ C. Mozkinen funtzioak ez du puntu gerakorrik
- ☐ D. $(x,y,z)=(0,0,0)$ zela-puntua da
- ☐ E. $(x,y,z)=(7,3,1)$ puntua maximo globala da, baina ez lokala

- ☐ F. Mozkinen funtzioak bi puntu gerakor ditu
- ☐ G. $(x,y,z)=(7,3,1)$ puntua maximo lokala da, eta baita ere globala
- ☐ H. Mozkinen funtzioak puntu gerakor bakarra dauka

Bidali

3 

Puntuak:
--/10

Enpresak lortu dezakeen mozkin maximoa honakoa da:
(soilik zenbaki zuzena jarri, unitaterik ez)

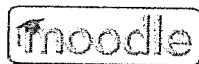
Erantzuna:

Bidali

Gorde bidali gabe

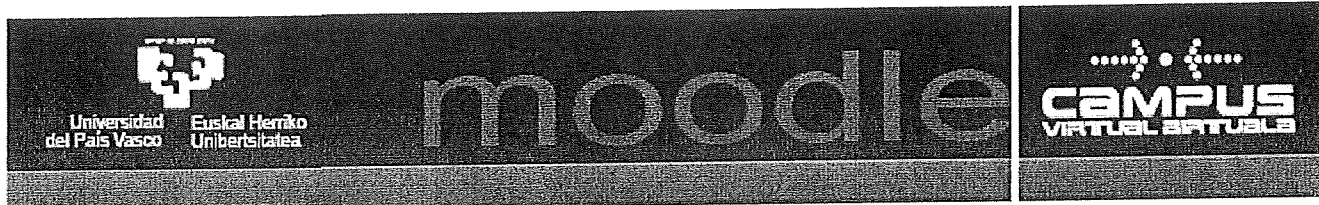
Orria bidali

Bidali dena eta bukatu



JOSE MARIA ZENDOIA SAINZ barruan da (Irten)

Validate HTML | Section 508 Check | WCAG 1 (2,3) Check



moodle ► 251_EMPRE302_08308_32 ► Galdetegiak ► Mozkinak maximizatu (2) ► 1 saiakera

Galdetegia eguneratu

Informazioa Emailtzak Aurreikusi Editatu

Mozkinak maximizatu (2) aurreikusi

Hasi berriro

Oharra: zure ikasleek ezin dute eskuratu orain galdetegi hau

1

Puntuak:
--/20

Enpresa batek bi lehengai erabiltzen ditu x eta y unitateetan, ondasun bat ekoizteko. Ondasun horretako q unitate egiten dira hurrengo ekoizpen-funtzioak adierazten duenaren arabera: $q(x,y) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}$.

Enpresak x unitate bakoitza 15 €tan eta y unitate bakoitza 10 €tan erosten ditu.

Ekoiztutako ondasunaren q unitate bakoitza 30 €tan saltzen bada, zenbat lehengai erabili behar da mozkinak maximizatzeko?

Aukeratu
erantzun
bat

- ☐ A. Mozkinak maximizatzeko konbinaziorik hoberena $(x,y)=(4,2)$ da
- ☐ B. Mozkinak maximizatzeko konbinaziorik hoberena $(x,y)=(3,3)$ da
- ☐ C. Mozkinak maximizatzeko konbinaziorik hoberena $(x,y)=(1,1)$ da
- ☐ D. Maximorako mozkinak ez-bornatuak dira

Bidali

2

Puntuak:
--/10

Aukeratu
erantzun
bat

- ☐ A. x eta y positiboak direnean mozkinen funtzioa ganbila da
- ☐ B. x eta y positiboak direnean mozkinen funtzioa ahurra da
- ☐ C. x eta y positiboak direnean mozkinen funtzioa ganbila da batzuetan, besteetan ahurra

Bidali

3

Puntuak:
--/5

Lortzen diren mozkin maximoak hauek dira:

(zenbakia soilik idatzi)

- .

[Bidali](#)4  $q(x,y)=\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y}$ ekoizpen funtzioa:Puntuak:
--/10Aukeratu
erantzun
bat

- ☐ A. Homeogeneoa da, $m=6/5$ mailakoa (errendimendu gorakorrak)
- ☐ B. Ez da homeogeneoa
- ☐ C. Homeogeneoa da, $m=1$ mailakoa (errendimendu konstanteak)
- ☐ D. Homeogeneoa da, $m=5/6$ mailakoa (errendimendu beherakorrak)

[Bidali](#)[Gorde bidali gabe](#)[Onia bidali](#)[Bidali dena eta bukatu](#)

JOSE MARIA ZENDOIA SAINZ barruan da (Irten)

[Validate HTML](#) | [Section 508 Check](#) | [WCAG 1 \(2,3\) Check](#)

Bosgarren gaia: Hoberenatzea aldagai anitzetan (hoberenatze baldintzatua)

1.- Planteamendu orokorra

Hoberenatzen dugun helburu-funtzioaren aldagai askeek hainbat baldintza bete behar badituzte, hoberenatze baldintzatua dela esaten da. Oro har, aldagai askeek bete beharreko baldintzak (edo murrizketak), berdintzazko ekuazioak izan daitezke, edota desberdintzazko ekuazioak (inekuazioak). Modu honetan planteatzen da honelako problema bat:

$$\begin{array}{l} \text{hoberenatu } y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \left. \begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \\ \dots\dots\dots \\ h_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \end{array} \right\} \text{ondokoari lotuta:} \end{array}$$

Kasu honetan berdintzazko m ekuazio egongo lirateke, eta desberdintzazko k ekuazio.

2.- Dimentsio txikiko ariketen ebazpen grafikoa

Ebatzi behar dugun problema dimentsio txikikoa bada (esaterako, bi aldagai aske eta bizpahiru inekuazio), planoaren gainean ebatzi daiteke grafikoki. Horretarako, inekuazioak betetzen dituzten puntuen multzoa marraztuko dugu, jakiteko zein multzoren gainean hoberenatu behar dugun helburu-funtzioa. Ondoren, helburu-funtzioaren maila-kurbak adieraziko ditugu, maximo globala eta minimo globala zein puntutan aurkitzen diren lortzeko.

Oro har, hoberen globalak bi kurben arteko ukitze-puntuetan egongo dira, beraz, puntu horretan helburu-funtzioaren eta dagokion murrizketaren kurbaren maldak berdinak izango direnez, deribatuak berdinduz topatuko ditugu hoberenak.

Beste kasu batzuetan, hoberen globala bi murrizketen muga-puntuak ebakitzen diren lekuan egongo da, beraz, bi kurba horiek berdinuz aurkituko ditugu aipatu puntua.

Azkenik, problema bornatu gabea izan daiteke (maximo zein minimorako), eta kasu honetan ez dago soluziorik.

Kasu orokor batean, helburu-funtzioak n aldagai aske baditu, grafikoan oinarrituz ezingo dugu ebatzi, eta horretarako metodo orokor bat bilatu beharko dugu. Ikasgai honetan, soilik aztertuko dugu hoberenatze baldintzatuan agertzen diren murrizketa guztiak berdintzazko ekuazioak diren kasua.

hoberenatu $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\left. \begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \text{ondokoari lotuta:} \dots\dots\dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = u_1(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ x_m = u_m(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) \end{array} \right\}$$

hoberenatu $y = f(x_{m+1}, \dots, x_n)$

eta honelako ariketen ebazpena laugarren ikasgaian aztertu dugu (hoberenatzat ez baldintzatua).

Bedi honako problema, n aldagai aske eta m murrizketa dituen ($m < n$):

hoberenatu $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\left. \begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \text{ondokoari lotuta:} \dots\dots\dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\}$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda_1 \cdot g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) - \dots - \lambda_m \cdot g_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Syd 522
Loren 970



hots, helburu-funtzioari kentzen zaio murrizketa bakoitzeko ekuazioen ezker aldean agertzen den funtzioa, landa aldagai berri batez biderkatuta (Lagrangearen biderkatzaileak). Beraz, funtzio lagrangearrean $n + m$ aldagai aske daude, helburu funtzioan zeuden jatorrizko n aldagaiak eta erantsi ditugun m biderkatzaileak.

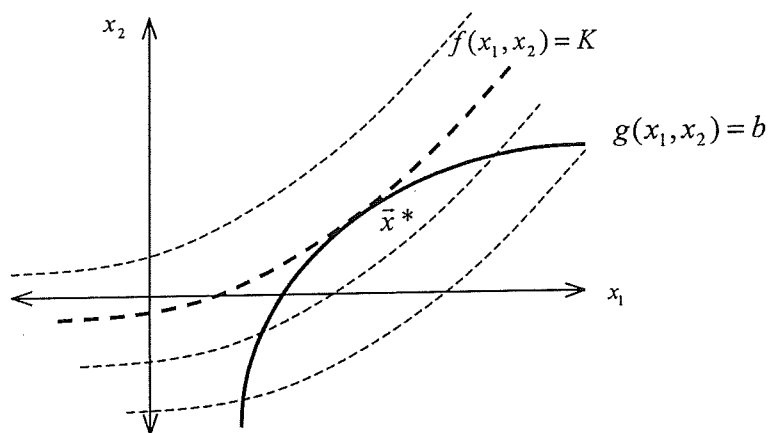
Hoberen lokalerako baldintza beharrezkoa:

Planteatuta dugun ariketak hoberen lokal bat duen puntuan, lagrangearraren lehen ordenako deribatu partzial guztiak nuluak dira.

Frogapena:

Bedi problema hau: *hoberenatu* $y = f(x_1, x_2)$

$$\text{o.l.: } g(x_1, x_2) = b$$



Hoberen lokal bat dago $f(x_1, x_2) = K$ maila-kurbaren eta $g(x_1, x_2) = b$ kurbaren arteko $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ ukitze-puntuan, beraz, puntu horretan bi kurba horietako maldak berdinak izango dira. Funtzio inplizituen deribazioa erabiliz:

$$\frac{-f_{x_1}(\bar{x}^*)}{f_{x_2}(\bar{x}^*)} = \frac{-g_{x_1}(\bar{x}^*)}{g_{x_2}(\bar{x}^*)}$$

$$\text{Ondorioz: } \frac{f_{x_1}(\bar{x}^*)}{g_{x_1}(\bar{x}^*)} = \frac{f_{x_2}(\bar{x}^*)}{g_{x_2}(\bar{x}^*)} = \alpha \Rightarrow \begin{cases} f_{x_1}(\bar{x}^*) = \alpha \cdot g_{x_1}(\bar{x}^*) \\ f_{x_2}(\bar{x}^*) = \alpha \cdot g_{x_2}(\bar{x}^*) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{x_1}(\bar{x}^*) - \alpha \cdot g_{x_1}(\bar{x}^*) = 0 \\ f_{x_2}(\bar{x}^*) - \alpha \cdot g_{x_2}(\bar{x}^*) = 0 \end{cases}$$

Bestalde, puntu horretan murrizketa egiaztatuko da: $g(x_1^*, x_2^*) = b$



Ikus dezagun lagrangearren gertatzen dena. Ariketa honi dagokion funtzio lagrangearren biderkatzaile bakar bat dago (murrizketa bakar bat dagoelako):

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) - \lambda \cdot (g(x_1, x_2) - b)$$

Eta bere lehen ordenako hiru deribatu partzialak hauek dira:

$$L_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = f_{x_1}(x_1, x_2) - \lambda \cdot g_{x_1}(x_1, x_2)$$

$$L_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = f_{x_2}(x_1, x_2) - \lambda \cdot g_{x_2}(x_1, x_2)$$

$$L_{\lambda}(x_1, x_2, \lambda) = -(g(x_1, x_2) - b)$$

Ikus daitekeenez, $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ hoberen lokalean hiru deribatu partzial hauek zero balio dute, α parametroaren balioa izanik biderkatzaileak hartuko duena.

Planteatutako ariketak aldagai aske eta murrizketa gehiago baditu, antzera frogatuko genuke.

5.- Hoberen lokalerako baldintza nahikoak

Baldintza hauek aipatu aurretik, lagrangearren matrize hessiar osatua idatzi behar dugu, honela:

$$\bar{H}_L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \begin{pmatrix} (0)_{m \times m} & P_{m \times n} \\ P'_{n \times m} & Q_{n \times n} \end{pmatrix}$$

non P eta Q honako matrizeak diren:

$$P_{m \times n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \nabla g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ \nabla g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}; \quad Q_{n \times n}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \begin{pmatrix} L_{x_1 x_1} & \dots & L_{x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{x_n x_1} & \dots & L_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

Matrize hessiar osatua, agertu diren $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ puntu gerakor bakoitzean aztertu behar da, bere azken $n-m$ minore nagusiak kalkulatu. Guzti hauen zeinua $(-1)^m$ bada, puntu gerakor horretan minimo lokal hertsia dago, eta berriz, minore horien zeinua txandakatuz badoa, $(-1)^{m+1}$ zeinuaz hasita, orduan puntu horretan maximo lokal hertsia dago.

Honelako kasu batean: $hoberenatu \ y = f(x_1, x_2)$

$$o.l.: \ g(x_1, x_2) = b$$

matrize hessiar osatua honela geratzen da: $\bar{H}_L(x_1, x_2, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} \\ g_{x_1} & L_{x_1 x_1} & L_{x_1 x_2} \\ g_{x_2} & L_{x_2 x_1} & L_{x_2 x_2} \end{pmatrix}$



eta bere azken $n-m$ minorea bakarra da $n-m=2-1=1$ baita, alegia, matrize horren determinantearen zeinua aztertu behar da puntu gerakor bakoitzeko: $(-1)^m = (-1)^1 = -1$ zeinua bada (negatiboa bada), minimo bat daukagu, zeinua $(-1)^{m+1} = (-1)^2 = 1$ bada (positiboa), maximo bat da.

6.- Lagrange-ren biderkatzaileen esanahi ekonomikoa

Hoberenatzte problema bat Lagrangeren metodoaz ebazterakoan (berdintzazko murrizketen baldintzapean), soluzioa aurkitzerakoan $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jatorrizko aldagaien balio hoberenak topatzeaz gain, $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ biderkatzaileek ere balio hoberen bat lortzen dute puntu horietan. Ikus dezagun zein den hauen esanahia.

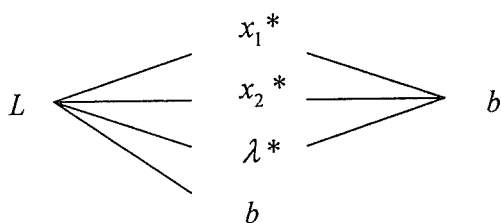
Horretarako, kasurik arruntena erabiliko dugu berriro ere:

$$\text{hoberenatu } y = f(x_1, x_2)$$

$$\text{o.l.: } g(x_1, x_2) = b$$

Eman dezagun topatu dugula hoberen lokal hertsia bat: $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$

Orain eman dezagun b koefizientea aldakorra dela, horren ondorioz, b -ren aldaketetarako $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$ balio hoberenak ere aldatuko dira.



Kasu honetan, funtzio lagrangearra hau da:

$$L(x_1^*(b), x_2^*(b), \lambda^*(b), b) = f(x_1^*(b), x_2^*(b)) - \lambda^*(b) \cdot (g(x_1^*(b), x_2^*(b)) - b)$$

Deribatzen bada L funtzioa b aldakorrarekiko, katearen erregelaz:

$$L_b(x_1^*, x_2^*, \lambda^*, b) = L_{x_1^*} \cdot \frac{\partial x_1^*}{\partial b} + L_{x_2^*} \cdot \frac{\partial x_2^*}{\partial b} + L_{\lambda^*} \cdot \frac{\partial \lambda^*}{\partial b} + L_b$$

eta puntu gerakorretan $L_{x_1^*} = 0$, $L_{x_2^*} = 0$ eta $L_{\lambda^*} = 0$ direnez:

$$L_b(x_1^*, x_2^*, \lambda^*, b) = L_b = (-1) \cdot (-\lambda^*(b)) = \lambda^*$$

Bestalde, puntu hoberenetan $g(x_1^*, x_2^*) = b$ izango denez, puntu horietan lagrangearrak eta helburu-funtzioak balio bera hartzen dute, horregatik $\lambda^* = f_b(x_1^*, x_2^*)$. Hau da, hoberen lokal



batean helburu-funtzioa deribatu egiten bada murrizketaren b koefiziente aldakorrarekiko, biderkatzailearen balio hoberena lortzen da. Beste modu batez esanda, b -ren gehikuntza infinitesimal batek helburu-funtzioan duen eragina puntu hoberen batean aurkitzen bagara, λ^* balioak emango digu.

Edo beste modu batez:

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial b} = \lambda^* \Rightarrow \frac{\Delta f(x_1^*, x_2^*)}{\Delta b} \approx \lambda^* \Rightarrow \Delta f(x_1^*, x_2^*) \approx \lambda^* \cdot \Delta b$$

Azken emaitza hau erabil dezakegu b koefizientearen aldaketa txiki batek helburu-funtzioan sortzen duen gutxi gora beherazko aldaketa neurtzeko.

Jatorrizko probleman murrizketa bat baino gehiago edukiko bagenu, bakoitzari dagokion biderkatzailearen esanahia berdina da puntu hoberenetan, alegia:

$$\Delta f(\vec{x}^*) \approx \lambda_i^* \cdot \Delta b_i$$

i -garren murrizketan agertzen den b_i koefizientearekiko eta hari lotuta kalkulatu dugun λ_i^* biderkatzailearen balioarekiko.

Bosgarren ikasgaia

1) Ondoko buruketa matematikoak ebatzi arrazonamendu geometrikoen bidez:

a) Hoberenatu: $2x_1 + x_2$

ondokoari lotuta: $1 \leq x_1 \leq 2$; $1 \leq x_2 \leq 2$

b) Hoberenatu: $x + y$

ondokoari lotuta: $x^2 + y^2 \leq 1$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

c) Hoberenatu: $25 - x^2 - y^2$

ondokoari lotuta: $2x + y \leq 6$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

d) Hoberenatu: $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$,

ondokoari lotuta: $-2x_1 + x_2 \leq 2$; $x_1 - x_2 \leq 2$; $x_1 + x_2 \geq 5$; $x_1 \leq 5$; $x_2 \leq 5$

e) Hoberenatu: $\frac{x+y}{x}$

ondokoari lotuta: $1 \leq x \leq 4$; $1 \leq y \leq 4$

Er : a) (1, 1) *minimoa* ; (2, 2) *maximoa*b) (0, 0) *minimoa* ; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *maximoa*c) (0, 6) *minimoa* ; (0, 0) *maximoa*d) $(5/2, 5/2)$ *minimoa* ; (5, 5) *maximoa*e) (4, 1) *minimoa* ; (1, 4) *maximoa*

(guztiak, hoberen global hertsia)

2) Hoberenatu $f(x, y) = x^2 + y^2$

ondokoari lotuta: $3x + y = 4$

a) Adierazpen grafikoan oinarrituz ebatzi (metodo geometrikoa)

b) Aldagaien ordezkapen metodoaz ebatzi

c) Lagrangeren biderkatzaileen metodoaz ebatzi

Er : $x^* = 1,2$; $y^* = 0,4$ $\rightarrow f^*_{\min} = 1,6$ ($\lambda^* = 0,8$)



3) Hoberenatu $y = \ln\left(\frac{1}{x_1 \cdot x_2}\right) = -\ln(x_1 \cdot x_2)$

ondokoari lotuta: $x_1 + 5x_2 = 5$

a) Adierazpen grafikoa oinarrituz ebatzi (metodo geometrikoa)

b) Aldagaien ordezkapen metodoaz ebatzi

c) Lagrangeren biderkatzaileen metodoaz ebatzi

Er: $x_1^* = 2,5$; $x_2^* = 0,5 \rightarrow f^*_{\min} = \ln 1,25 \approx 0,2231$ ($\lambda^* = -2/5$)

4) Lagrangeren metodoaz, hiru aldagaiko $U = x^2 + y^2 + z^2$ funtzioaren hoberenak lortu,

ondokoari lotuta: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 9$

Er: $x^* = y^* = z^* = \frac{1}{3}$ ($\lambda^* = -2/27$) $\rightarrow U^*_{\min} = \frac{1}{3}$

5) Aldagaien ordezkapen metodoaz, eta Lagrangeren metodoaz, problema hau ebatzi:

hob $U = x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z$

o.l.: $\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x - y = 1 \end{array} \right\}$

Er: $x^* = 5/2$; $y^* = 3/2$; $z^* = 2 \rightarrow U^*_{\max} = \frac{47}{4}$ ($\lambda_1 = 4$; $\lambda_2 = -1/2$)

6) Enpresa batek bi ondasun ekoizten ditu, X eta Y , hauen prezio unitarioak $p_x = 30$ eta

$p_y = 50$ izanik. Kostu totalen funtzioa hau da: $K(x, y) = \frac{x^2}{2} - x + x \cdot y + y^2 - 4y + 40$, ondasun

bakoitzetik x eta y unitate fabrikatzen direnean.

a) Mozkina maximotzeko ekoizpen hoberena kalkulatu

b) Guztira 30 unitate ekoizten badira, zein da lortu daitekeen mozkin maximoa?

c) Unitate gehigarri bat ekoizteko 2 moneta-unitate inbertitu behar dira. Inbertsio hau errentagarria ote den adierazi, ariketa osoa berriro ebatzi gabe.

Er: a) $x^* = 8$; $y^* = 23$

b) $x^* = 7$; $y^* = 23$; ($\lambda^* = 1$) $\rightarrow M^*_{\max} = 704,5 \text{ m.u.}$



$$c) \Delta M^* \approx 1 < 2 \text{ (inbertsioa ez da errentagarria)}$$

7) Enpresa baten ekoizpena bi aldagai hauen menpekoea da: erabilitako makina kopurua (m), eta lan egindako ordu kopurua (t), honako funtzioaren arabera: $P(m, t) = 15m - 1,5m^2 + 30t - t^2$. Ekoizten den unitate bakoitzaren kostua 12 m.u.koa da erabilitako makina bakoitzeko, eta 8 m.u.koa, lan egindako ordu bakoitzeko.

Ekoizpen maximoa lortzeko erabili beharreko makina eta lan-ordu kopuruak kalkulatu, ekoizpen prozesuan aurreikusitako 120 m.u. gastatu behar badira. Zenbat unitate ekoiztuko dira guztira? Lagrangeren biderkatzailearen esanahia azaldu.

$$\underline{Er}: m^* = 2 \text{ makina} ; t^* = 12 \text{ lan ordu} \rightarrow P^*_{MAX} = 240 \text{ unitate}$$

$$\lambda^* = 0,75 \rightarrow \text{Gastatzen den m.u. bakoitzeko ekoizpena } 0,75 \text{ unitateetan handituko da, g.g.b.}$$

8) Enpresa baten ekoizpen-funtzioa, erabilitako x eta y inputen arabera, $Q = x^2 \cdot y$ da. Input horien prezio unitarioak $p_x = 2$ eta $p_y = 3$ m.u.koak dira. Enpresak daukan aurrekontu erabilgarria 900 m.u.koa da.

a) Ekoizpen maximoa aurkitu, eta horretarako beharrezkoak diren input kopuruak, aurrekontu erabilgarri guztia agortuz.

b) Nola eragingo luke ekoizpenean aurrekontua m.u. 1ean handituko balitz?

$$\underline{Er}: a) Q^*_{MAX} = 9 \cdot 10^6 \text{ unitate} ; x^* = 300 \text{ unitate} ; y^* = 100 \text{ unitate}$$

$$b) \lambda^* = 3 \cdot 10^4 \rightarrow \text{ekoizpena } 30 \text{ mila unitateetan gehituko litzateke, gutxi gora behera}$$

9) Industriegune batean input bakarra kontsumitzen da, bertatik erabilgarri dagoen kopurua b delarik, erabat kontsumitu beharrekoa. Gune horretan bi ekoizpen-prozesu daude, eta haien artean banatu behar da erabilgarri dagoen input kopurua.

Prozesu bakoitzak ematen dituen etekinak $R_1 = 100 - (x - 2)^2$; $R_2 = 50 - (y - 10)^2$ dira, hurrenez hurren, x eta y izanik lehen eta bigarren prozesuan erabilitako input kopurua.

Zein da prozesu bakoitzean erabili beharreko input kopurua, etekin totala maximoa izan dadin? Nola eragiten du industriegunearen etekinean input erabilgarriaren gutxitzeak?

$$\underline{Er}: x^* = \frac{b}{2} - 4 ; y^* = \frac{b}{2} + 4 \quad (\lambda^* = 12 - b) \quad \text{Input unitate gutxiago bakoitzeko, etekina } 12 - b$$

eurotan gutxitzen da, gutxi gora behera



10) Enpresa batek egiten duen artikularen ekoizpen funtzioa $Q = 10x_1 \cdot x_2 - 5x_1^2 - x_2^2$ da, x_1 eta x_2 izanik artikulua hori egiteko behar diren bi faktoretan kontsumitutako kopuruak. Faktoreen prezio unitarioak $p_1 = 10$ eta $p_2 = 2$ dira (euroak). Ondokoak kalkulatu:

- 16.000 € erabiliz ekoiztu daitekeen kopuru maximoa. Nola eragiten du ekoizpen horretan euro 1 gehiago erabili ahal izateak?
- 160.000 unitate ekoizteko kostu minimoa. Output unitate bakoitzak sortzen duen mozkina $\frac{1}{300}$ €koa bada, ekoizpena handitzea errentagarria da?

Er: a) $x_1^* = 1000$; $x_2^* = 3000$ ($\lambda^* = 2000$) Ekoizpena 2000 unitateetan handitzen da, g.g.b.

b) $x_1^* = 100$; $x_2^* = 300$ ($\lambda^* = \frac{1}{200}$) Kostua gutxi gora behera $\frac{1}{200} > \frac{1}{300}$ €tan handitzen da output unitate berri bakoitzeko (ez da errentagarria ekoizpena handitzea)

11) Bi ondasun erosten dituen kontsumitzaile baten baliagarritasun funtzioa $U = q_1 \cdot q_2$ da, erositako unitateak q_1 eta q_2 direnean. Bi ondasun horietako prezio unitarioak $p_1 = 3$ eta $p_2 = 4$ €koak badira, eta errenta erabilgarria 48 €koa bada, kalkulatu baliagarritasuna maximizatzeko erosi behar dituen kopuruak errenta erabilgarri guztia gastatuz:

- Metodo geometrikoaz
- Aldagaien ordezkapen metodoaz
- Lagrangeren biderkatzaileen metodoaz

Kontsumitzaileak 46 € erabilgarri edukiko balitu, nola eragingo luke honek bere baliagarritasun maximoan? (puntu hoberen berria kalkulatu gabe erantzun)

Er: $q_1^* = 8$; $q_2^* = 6 \rightarrow U^*_{\max} = 48$ ($\lambda^* = 2$)

$\lambda^* = 2 \Rightarrow \Delta U^* \approx -4$ (4 unitateko gutxitzea, g.g.b.)

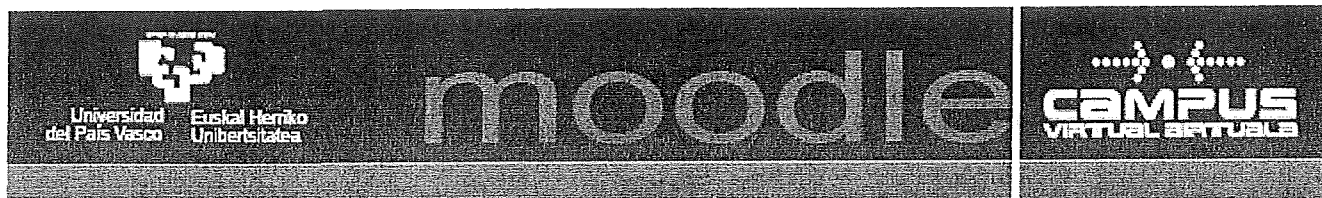


12) Diputazioak zerbitzugune bat eraiki behar du auto gidarientzat. Bere azalera laukizuzena izango da, 5.000 m^2 edukiko ditu eta errepidera jotzen ez duten hiru alboetan hesi bat jarriko da. Zein da hesiaren luzera minimoa?

- a) Metodo geometrikoaz ebatzi
- b) Lagrange-ren metodoaz ebatzi
- c) Hesiaren metro bakoitzak 50 € balio badu, zenbatean aldatuko da kostua zerbitzugunearen azalera metro karratu bat handitzen bada?

Er: a) b) $x^* = 100 \text{ m.}$; $y^* = 50 \text{ m.}$ $\rightarrow L^*_{\min} = 200 \text{ m.}$; $K^*_{\min} = 10.000 \text{ €}$

$$c) \lambda^* = \frac{1}{50} \Leftrightarrow \Delta L^* \approx \frac{1}{50} \text{ m.} \Rightarrow \Delta K^* \approx \frac{1}{50} \cdot 50 = 1 \text{ €}$$



moodle ► 251_EMPRE302_08308_32 ► Galdetegiak ► Aldagai aske bakarreko funtzio baten azterketa (II) ► 1 saiakera

Galdetegia eguneratu

Informazioa Emaizak Aurreikusi Editatu

Aldagai aske bakarreko funtzio baten azterketa (II) aurreikusi

Hasi berriro

Oharra: zure ikasleek ezin dute eskuratu orain galdetegi hau

1 $f(x) = (x^2 + 1)e^x$ funtzioa emanda:

Puntuak:
--/10

- Gutxienez erantzun bat aukeratu
- ☐ A. $x = -1$ inflexio-puntua da
 - ☐ B. $x = -1$ puntu gerakorra da
 - ☐ C. $x = -1$ minimo lokala da
 - ☐ D. $x = -1$ maximo lokala da

Bidali

2 $f(x) = (x^2 + 1)e^x$ funtzioa emanda:

Puntuak:
--/10

- Gutxienez erantzun bat aukeratu
- ☐ A. $x = -3$ maximo lokala da
 - ☐ B. $x = -3$ minimo lokala da
 - ☐ C. $x = -3$ inflexio-puntua da
 - ☐ D. $x = -3$ puntu gerakorra da

Bidali

3 $f(x) = (x^2 + 1)e^x$ funtzioa emanda:

Puntuak:
--/15 (laguntza: erantzunetatik hiru dira zuzenak)

- Gutxienez erantzun bat aukeratu
- ☐ A. Funtzioak bi inflexio-puntu ditu
 - ☐ B. Funtzioak ez du inflexio-punturik
 - ☐ C. Funtzioa ahurra da $x = -3$ eta $x = -1$ tartean, bestela ganbila da

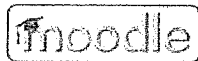
- ☐ D. Funtzioak bi hoberen lokal ditu
- ☐ E. Funtzioa ahurra da minus infinitua eta $x=-3$ tartean, bestela ganbila da
- ☐ F. Funtzioa ganbila da bere izate-eremu osoan
- ☐ G. Funtzioak ez du hoberen lokalik
- ☐ H. Funtzioak inflexio-puntu bakarra du
- ☐ I. Funtzioak hoberen lokal bakarra du
- ☐ J. Funtzioa ahurra da minus infinitua eta $x=-1$ tartean, bestela ganbila da
- ☐ K. Funtzioa ahurra da bere izate-eremu osoan

[Bidali](#)

[Gorde bidali gabe](#)

[Orria bidali](#)

[Bidali dena eta bukatu](#)



JOSE MARIA ZENDOIA SAINZ barruan da (Irten)

[Validate HTML](#) | [Section 508 Check](#) | [WCAG 1 \(2,3\) Check](#)

**Laugarren gaia: Hoberenatzea aldagai anitzetan (hoberenatze ez baldintzatua)****1.- Hoberenatze problema baten planteamendu orokorra**

Aldagai anitzeko funtzio bat emanda, bere hoberenak kalkulatzea, baldintzarik gabe, honelako problema bat ebaztea da: *hoberenatu* $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, hau da, helburu-funtzioak balio maximo eta minimoak non hartzen dituen aurkitzea.

Baldintzarik gabeko hoberenatzean, funtzioaren puntu hoberenak E izate-eremu osoan bilatuko ditugu.

2.- Topologia nozioak

$\vec{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ puntua emanda, bertan zentroa duen bola irekia, $\delta > 0$ erradiokoa, honako puntu-multzoa da: $B_\delta(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbf{R}^n / d(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta\}$. Hots, $\vec{x}_0$ puntutik δ baino distantzia txikiagora dauden puntu guztiak.

- $\vec{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ puntua eta $A \subset \mathbf{R}^n$ multzoa emanda, $\vec{x}_0$ da A -ren barne-puntua, bertan zentratutako bola ireki bat existitzen bada A multzoaren parte dena. A -ren barne-puntu guztiek A -ren barnealdea osatzen dute.
- $\vec{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ puntua eta $A \subset \mathbf{R}^n$ multzoa emanda, $\vec{x}_0$ da A -ren muga-puntua, bertan zentratutako bola ireki guztiek A -ren eta bere osagarriaren puntuak badituzte. A -ren muga-puntu guztiek A -ren muga osatzen dute.
- $\vec{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ puntua eta $A \subset \mathbf{R}^n$ multzoa emanda, $\vec{x}_0$ da A -ren kanpo-puntua, bertan zentratutako bola ireki bat existitzen bada A -ren osagarriaren parte dena. A -ren kanpo-puntu guztiek A -ren kanpoaldea osatzen dute.
- Multzo baten muga-puntu guztiak multzo horretakoak badira, multzo itxia dela esaten da.
- Multzo baten muga-puntu guztiak multzo horretakoak ez badira, multzo irekia dela esaten da.
- Multzo baten muga-puntu batzuk multzo horretakoak badira, eta beste batzuk ez, orduan multzo hori ez da irekia, ezta itxia ere.



- Multzo bat emanda, bere puntu guztietatik jatorrira dagoen distantzia finitua bada, multzo hori bornatua dela esaten da.
- Multzo bat emanda, bere edozein puntu pare hartuta, biak lotzen dituen segmentuaren puntu guztiak multzo horretakoak badira ere, multzo hori konbexua dela esaten da.

3.- Hoberen motak. Muturreko balioen teorema

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funtzioaren puntu hoberenak mota hauetakoak izan daitezke:

- Maximo lokal hertsia: $\vec{x}_0$ M.l.h. $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 / \forall \vec{x} \in B_\delta(\vec{x}_0) : f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)$
- Maximo lokal erlatiboa: $\vec{x}_0$ M.l.e. $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 / \forall \vec{x} \in B_\delta(\vec{x}_0) : f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$
- Minimo lokal hertsia: $\vec{x}_0$ m.l.h. $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 / \forall \vec{x} \in B_\delta(\vec{x}_0) : f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0)$
- Minimo lokal erlatiboa: $\vec{x}_0$ m.l.e. $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 / \forall \vec{x} \in B_\delta(\vec{x}_0) : f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$
- Maximo global hertsia: $\vec{x}_0$ M.g.h. $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E : f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)$
- Maximo global erlatiboa: $\vec{x}_0$ M.g.e. $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E : f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$
- Minimo global hertsia: $\vec{x}_0$ m.g.h. $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E : f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0)$
- Minimo global erlatiboa: $\vec{x}_0$ m.g.e. $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E : f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$

Beraz, puntu hoberenak sailkatzeko hiru irizpide ditugu:

- Maximoa edo minimoa izatea: funtzioari baliorik handiena edo txikiena ematea.
- Lokala edo globala izatea: puntu hoberena bere ingurune batean, ala hoberenatze multzo osoan izatea.
- Hertsia edo erlatiboa izatea: soilik puntu horretan funtzioak lortzea muturreko balioa, edo beste punturen batean ere funtzioak balio bera hartzea.

Muturreko balioen teorema:

$y = f(\vec{x})$ izanik funtzio jarraia $S \subset \mathbb{R}^n$ multzo itxi eta bornatu batean, orduan multzo horretan maximo bat ($\vec{x}_M$) eta minimo bat ($\vec{x}_m$) existitzen dira, non:

$$f(\vec{x}_m) < f(\vec{x}) < f(\vec{x}_M)$$

**4.- Barne hoberen lokalerako baldintza beharrezkoa. Puntu gerakorrak. Zela-puntuak**

$y = f(\vec{x})$ funtzioaren deribatu partzialak existitzen badira, funtzioaren hurbilketa linealaz badakigu $f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$ izango dela, $\vec{x}_0$ puntuan zentratutako bola ireki baten $\vec{x}$ puntuetarako. Bestalde, $\nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$ biderkadura eskalarak balio positiboak zein negatiboak har ditzake, $\vec{x}$ desberdinetarako.

$\vec{x}_0$ maximo lokal hertsia izanik, bertan zentratutako bola batean $f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)$ izango da, ondorioz, bola horretako $\vec{x}$ guztietarako $\nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) \leq 0$ izatea beharko genuke, eta biderkadura eskalar horrek zeinu desberdinak har ditzakeenez, nahitaezkoa da $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$ egiaztatzea.

Antzera, $\vec{x}_0$ minimo lokal hertsia bada, frogatzen da nahitaezkoa dela bertan $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$ betetzea.

(Modu bertsuan frogatuko genuke maximo eta minimo lokal erlatiboetarako)

Beraz: $\vec{x}_0$ hoberen lokala $\Rightarrow \nabla f(\vec{x}_0) = 0$ (baina inplikazioa ez da beste aldera betetzen)

Bi aldagai askeko funtzioetako grafikoetan, gauza argia da: puntu batean maximo lokal bat zein minimo lokal bat baldin badago, bertan plano ukitzailea horizontala izango da, hau da, bere bi deribatu partzialek zero balioko dute.

Baina puntu batean deribatu partzialak zero izateak (funtzioaren plano ukitzailea horizontala izateak) ez du ziurtatzen puntu horretan maximo edo minimo lokal bat dagoenik.

Puntu gerakorrak: $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$ betetzen duten puntu guztiak puntu gerakorrak (edo kritikoak) direla esango dugu, hoberen lokalak izan ala ez.

Zela-puntuak: hoberen lokalak ez diren puntu gerakorrei zela-puntuak esaten zaie.

5.- Forma koadratikoak

$A_{n \times n}$ matrize simetriko bat emanda, $\vec{x}' \cdot A \cdot \vec{x}$ biderkadurari forma koadratikoa esaten zaio, izanik $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Forma koadratikoen sailkapena:

- $\vec{x}' \cdot A \cdot \vec{x} > 0$ bada $\forall \vec{x} \neq \vec{0}$, definitu positiboa da.
- $\vec{x}' \cdot A \cdot \vec{x} \geq 0$ bada, gutxienez anulatuz $\vec{x} \neq \vec{0}$ baterako, erdidefinitu positiboa da.



- $\vec{x}' \cdot A \cdot \vec{x} < 0$ bada $\forall \vec{x} \neq \vec{0}$, definitu negatiboa da.
- $\vec{x}' \cdot A \cdot \vec{x} \leq 0$ bada, gutxienez anulatzuz $\vec{x} \neq \vec{0}$ baterako, erdidefinitu negatiboa da.
- $\vec{x}' \cdot A \cdot \vec{x} > 0$ bada gutxienez x_{bektore} baterako, eta $\vec{x}' \cdot A \cdot \vec{x} < 0$ gutxienez beste baterako, definitu gabea da.

Forma koadratikoak sailkatzeko modu desberdinak daude. Matrizearen minore nagusiak erabiliz:

- Minore nagusi guztiak positiboak badira, forma koadratikoa definitu positiboa da.
- Minore nagusi guztiak, azkena ezik, positiboak badira, eta matrizearen determinantea nulua, orduan forma koadratikoa erdidefinitu positiboa da.
- Ordena bakoitiko minore nagusi guztiak negatiboak badira, eta ordena bikoitiko guztiak positiboak, forma koadratikoa definitu negatiboa da.
- Ordena bakoitiko minore nagusi guztiak negatiboak badira, eta ordena bikoitiko guztiak positiboak, azkena ezik, eta matrizearen determinantea nulua bada, orduan forma koadratikoa erdidefinitu negatiboa da.
- Bestela, forma koadratikoa definitu gabea da ziurrenera. (Oharra: tarteko minore nagusi nuluak badaude, forma erdidefinitua izan daiteke ere, beste irizpideak erabili beharko genituzke, autobalioena esaterako [Sydsaeter, 424 orr.] edo minore guztiak aztertzearena [Sydsaeter, 427 orr.]

6.- Hoberen lokalerako baldintza nahikoak

$y = f(\vec{x})$ funtzioaren bigarren ordenako deribatu partzialak existitzen badira, funtzioaren hurbilketa koadratikoaz badakigu $f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \Delta \vec{x} + \frac{1}{2} \Delta \vec{x}' \cdot Hf(\vec{x}_0) \cdot \Delta \vec{x}$ izango dela, $\vec{x}_0$ puntuan zentratutako bola ireki baten $\vec{x}$ puntuetarako.

$\vec{x}_0$ puntu gerakorra izanik eta $Hf(\vec{x}_0)$ definitu negatiboa bada, $f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)$ beteko da, alegia, $\vec{x}_0$ maximo lokal hertsia izango da. Hau da:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0} \\ Hf(\vec{x}_0) \text{ def.}(-) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{x}_0 \text{ maximo lokal hertsia.}$$

Antzera, $\vec{x}_0$ puntu gerakorra izanik eta $Hf(\vec{x}_0)$ definitu positiboa bada, $f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0)$ beteko da, alegia, $\vec{x}_0$ minimo lokal hertsia izango da. Hau da:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0} \\ Hf(\vec{x}_0) \text{ def.}(+) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{x}_0 \text{ minimo lokal hertsia.}$$



Bestalde, $\vec{x}_0$ puntu gerakorra izanik eta $Hf(\vec{x}_0)$ definitu gabea bada, $f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)$ eta $f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0)$ beteko da $\vec{x}$ desberdinetarako, alegia, $\vec{x}_0$ zela-puntua izango da. Hau da:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0} \\ Hf(\vec{x}_0) \text{ def. gabea} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{x}_0 \text{ zela-puntua.}$$

$\vec{x}_0$ puntu gerakorra izanik eta $Hf(\vec{x}_0)$ erdidefinitu negatiboa bada, zalantzazko kasua da, $\vec{x}_0$ izan baitaiteke maximo lokal hertsia, maximo lokal erlatiboa edo zela-puntua.

$\vec{x}_0$ puntu gerakorra izanik eta $Hf(\vec{x}_0)$ erdidefinitu positiboa bada, zalantzazko kasua da, $\vec{x}_0$ izan baitaiteke minimo lokal hertsia, minimo lokal erlatiboa edo zela-puntua.

Bigarren ordenako deribatu partzialak dituen funtzio baten puntu hoberenak bilatzen direnean, aurreko baldintzak erabil daitezke hoberen lokalak aurkitzeko. Baina irizpide horien bidez, hoberen globalak ez ditugu lortuko. Horretarako funtzioaren jokaera aztertu beharko da: hoberen lokalak, edo hauetako batzuk, izan daitezke ere hoberen globalak, edo gerta daiteke azken hauek izate-eremuaren muga-puntuetan egotea.

Bestalde, maximo globalerako (zein minimo globalerako) funtzioa bornatu gabea izan daiteke, bere irudiek infiniturantz (minus infiniturantz) jotzen badute.

7.- Funtzio ahur eta ganbilak. Hoberen globalerako baldintza nahikoa

Funtzio bat emanda, bere izate-eremuaren puntu baten inguruan funtzioaren hurbilketa linealaren balioak funtzioarenak baino txikiagoak badira, puntu horretan funtzio hori ganbila dela esaten da.

$y = f(\vec{x})$ funtzioaren bigarren ordenako deribatu partzialak existitzen badira, funtzioaren $f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \Delta \vec{x} + \frac{1}{2} \Delta \vec{x}' \cdot Hf(\vec{x}_0) \cdot \Delta \vec{x}$ hurbilketa koadratikoa hartuta $\vec{x}_0$ -ren inguruan, bertan hurbilketa lineala $p = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \Delta \vec{x}$ da (lehen bi batugaiak). Funtzioa ganbila izateko $f(\vec{x}) > p$ bete beharko denez, $Hf(\vec{x}_0)$ definitu positiboa izango da.

Funtzio bat emanda, bere izate-eremuaren puntu baten inguruan funtzioaren hurbilketa linealaren balioak funtzioarenak baino handiagoak badira, puntu horretan funtzio hori ahurra dela esaten da.

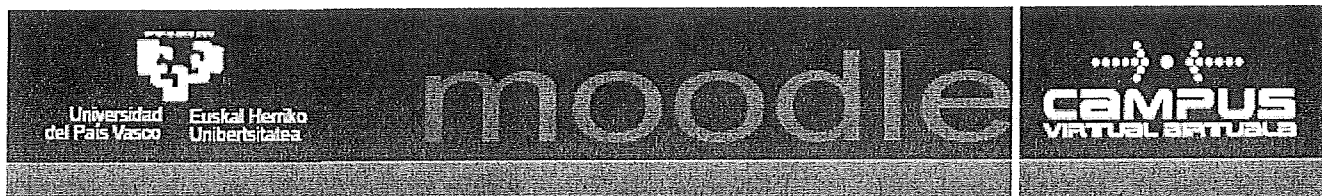
$y = f(\vec{x})$ funtzioaren bigarren ordenako deribatu partzialak existitzen badira, $\vec{x}_0$ puntuan funtzioa ahurra izateko $f(\vec{x}) < p$ bete beharko denez, $Hf(\vec{x}_0)$ definitu negatiboa izango da.



Hoberen globalerako baldintza nahikoa:

$y = f(\bar{x})$ funtzioa ganbila bada, eta bere izate-eremua multzo konbexua, orduan minimo lokala, globala izango da ere.

$y = f(\bar{x})$ funtzioa ahurra bada, eta bere izate-eremua multzo konbexua, orduan maximo lokala, globala izango da ere.



moodle ► 251_EMPRE302_08308_32 ► Galdetegiak ► Aldagai aske bakarreko funtzio baten azterketa ► 1 saiakera

Galdetegia eguneratu

Informazioa

Emaitzak

Aurreikusi

Editatu

Aldagai aske bakarreko funtzio baten azterketa aurreikusi

Hasi berriro

Oharra: zure ikasleek ezin dute eskuratu orain galdetegi hau

1 $f(x)=x^2 \cdot \ln(x)$ funtzioak:

Puntuak:
--/10

Aukeratu
erantzun
bat

- ☐ A. puntu gerakor bat dauka soilik
- ☐ B. Bi puntu gerakor ditu
- ☐ C. Ez du puntu gerakorrik

Bidali

2 $f(x)=x^2 \cdot \ln(x)$ funtzioak, $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ puntuan:

Puntuak:
--/10

Aukeratu
erantzun
bat

- ☐ A. Minimo lokal bat du
- ☐ B. Maximo lokal bat du
- ☐ C. Ez du hoberen lokalik

Bidali

3 Puntuak:
--/10 $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$ funtzioaren bigarren deribatua lortu, eta ondoren $f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

kalkulatu. Bere balioa honakoa da:

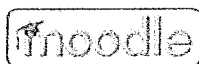
- Aukeratu erantzun bat
- ☐ A. 2
 - ☐ B. 0
 - ☐ C. -5

[Bidali](#)

4

Puntuak:
--/10 $f(x)=x^2 \cdot \ln(x)$ funtzioa ahurra da honako tartean:

a. Bere izate-eremu osoan

b. $\left(0, \frac{1}{e\sqrt{e}}\right)$ tarteanc. $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ tarteand. $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, \infty\right)$ tarteanAukeratu
erantzun
bat☐ A. (begiratu goiko "a" erantzuna)☐ B. (begiratu goiko "b" erantzuna)☐ C. (begiratu goiko "c" erantzuna)☐ D. (begiratu goiko "d" erantzuna)[Bidali](#)[Gorde bidali gabe](#)[Oria bidali](#)[Bidali dena eta bukatu](#)

JOSE MARIA ZENDOIA SAINZ barruan da (Irten)

[Validate HTML](#) | [Section 508 Check](#) | [WCAG 1 \(2,3\) Check](#)

Ots8 - Ots14

Otsailak 8:

Irakasgaiaren aurkezpena

Euskarri digitalaren aurkezpena

Lehen lauhilekoaren emaitzak aipatu (Enpresarako Matematikak I irakasgaiaren notak)

Otsailak 9:

1.- ALDAGAI ANITZEKO FUNTZIOAK

1.1.- Definizioa. Izate-eremua

Ondoko funtzioen izate-eremuak kalkulatu eta planoan marraztu:

$$z = \sqrt{x} + \sqrt{1-y} ; z = \frac{1}{x-y^2} ; z = \sqrt{25-x^2-y^2} ; z = \ln(x \cdot y)$$

Otsailak 10:

1.2.- Adierazpen grafikoa. Maila-kurbak

Ondoko funtzioen maila kurbak adierazi: $z = x^2 + y^2$

Adibideak: $z = \ln(x+y)$, $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

Otsailak 11 (talde-lana):

Taldeak antolatu

Lehen ikasgaiko ariketak banatu

Lanean hasi: bi aldagaietako funtzioen izate-eremuak eta maila-kurbak

Ots15 - Ots21

Otsailak 15:

... Maila-kurbak

Adibideak: $z = \ln(x \cdot y)$, $f(x, y) = e^{x \cdot y}$

$f(x, y) = \frac{y}{x}$ emanda, marraztu (2,8) eta (1,1) puntuetatik pasatzen diren maila-kurbak,

$f(x, y) = \frac{y}{x^2}$ emanda, marraztu (2,8) eta (1,1) puntuetatik pasatzen diren maila-kurbak

Otsailak 16:

$C(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ kostu-funtzioa emanda, isokoste kurbak marraztu

$Q(K, L) = 8\sqrt{K \cdot L}$ ekoizpen-funtzioa emanda, isokuenta kurbak marraztu

1.3.- Limiteak eta jarraitasuna:

Limitearen kontzeptua aldagai anitzeko funtzioetan

Adibideak: $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (5, 7)} (2x_1 + x_2) = 17$

$\lim_{(x, y) \rightarrow (5, 7)} \frac{y}{x^2} = \frac{7}{25}$; $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 7)} \frac{y}{x^2} = \pm \infty$; $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{y}{x^2} = \text{INDET}$

Funtzio jarraituak: kontzeptua

Ohiko funtzio jarraiak: polinomioak, logaritmoak, berreketak, sin, cos eta hauen konposaketak)

Otsailak 17:

Ondoko funtzioen jarraitasuna aztertu:

$$f(x, y) = \frac{x^2 \cdot y}{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2}; f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}; f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f(x, y) = \frac{x + y + 5}{x \cdot y}; f(x, y) = \begin{cases} \frac{x + y + 5}{x \cdot y} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Otsailak 18 (talde-lana):

Lehen ikasgaiko ariketak egiten bukatu

Ots22 - Ots28

Otsailak 22:

2.- DERIBAZIOA

2.1.- Deribatu partzialak. Esanahi ekonomikoa

Deribatu partzialen definizioa, adibide grafikoak,...

Kalkulatu $f(x,y)=x^2 \cdot y + 5x$ funtzioaren deribatu partzialak, definizioa erabiliz, (1,2)

puntu eta edozein (x,y) puntutan.

$f(x,y)=x^2+y^2$ funtzioaren deribatu partzialak kalkulatuta (1,1) puntuan. Adierazpen

grafikoa egin.

Deribazio arauak

Otsailak 23:

Elastikotasuna: definizioa

Adibidea: $f(x,y)=8xy-x^2$ funtzioaren elastikotasun partzialak kalkulatuta (3,4) puntuan

2.2.- Gradiente: definizioa

$f(x,y)=x^2 \cdot y + 5x$ funtzioaren gradiente idatzi

$KT(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 \cdot x_3 + \ln(x_2 \cdot x_3^2) + 10$ kostu totalen funtzioa emanda, ondasun

bakoitzaren kostu marjinalak kalkulatuta. Funtzioaren gradiente idatzi (10,20,5) puntuan

Gradientearen propietateak: gradiente elkarzuta maila-kurbarekiko

Adibidea: $f(x,y)=\frac{x}{y}$ funtzioaren maila-kurba eta gradiente (4,2) puntuan

Otsailak 24:

Adibidea: $f(x,y)=\ln(x \cdot y)$ funtzioaren gradiente eta maila-kurba (e, 1) puntutik

2.3.- Ordena goreneko deribatuak: definizioa

Matrize hesiarra, Schwarz-en teorema

$f(x,y)=x^3 \cdot y + e^{x \cdot y^2}$ funtzioaren matrize hessian lortu

$f(x,y)=2x^4y^2$ funtzioaren hirugarren ordenako deribatu partzialak kalkulatuta

Otsailak 25 (talde-lana):

- *Lehen ikasgaia: Liburuetako ariketak*
- *Bigarren ikasgaiko ariketak egiten hasi (lehen txostena)*

Mar1 - Mar7

Martxoak 1:

2.4.- Hurbilketa lineala: definizioa

Adibideak: $f(x,y)=x^2+y^2$ funtzioaren hurbilketa lineala (1,1) puntuaren inguruan.

Grafikoki egin Winplot programarekin.

$f(x,y)=x^3 \cdot y + e^{x \cdot y^2}$ funtzioaren hurbilketa lineala (1,0) puntuaren inguruan

2.5.- Hurbilketa koadratikoa: definizioa

$f(x,y)=x^3 \cdot y + e^{x \cdot y^2}$ funtzioaren koadratikoa (1,0) puntuaren inguruan

$f(x,y)=x^3 \cdot y + e^{x \cdot y^2}$ eta bere hurbilketa lineala eta koadratikoa Winplot programarekin

$f(x,y)=x^3 \cdot y + e^{x \cdot y^2}$ funtzioaren gutxi gora beherazko balioa (0.9,0.2) puntuan,

Mathematica programarekin

Martxoak 2:

2.6.- Funtzio konposatuen deribazioa

Katearen erregela

Adibideak: $y=\ln(x_1 \cdot x_2)$ izanik, non $x_2=e^{x_1}$ den, $\frac{dy}{dx_1}$ kalkulatu

$y=\sin(x_1 \cdot x_2)$ izanik, non $x_1=\frac{v_1}{v_2}$ eta $x_2=e^{v_1 \cdot v_2}$ diren, $\frac{\delta y}{\delta v_1}$ eta $\frac{\delta y}{\delta v_2}$ kalkulatu

$y=(\sin x)^{\cos x}$ kalkulatu, $y=u^v$ moduan

Martxoak 3:

$z=\ln(x+2y)$ funtzioa emanda, non $x=u \cdot v$ eta $y=4u^2+5v$ diren, $\frac{\delta^2 z}{\delta u \delta v}$ kalkulatu

$z=x \cdot f\left(\frac{x+1}{y}\right)$ funtzioa emanda, eta jakinik f deribagarria dela, $\frac{\delta z}{\delta x}$ kalkulatu

$z=x \cdot y \cdot f\left(\frac{x+y}{x \cdot y}\right)$ funtzioa emanda, eta jakinik f deribagarria dela, $\frac{\delta z}{\delta x}$ kalkulatu

Martxoak 4 (talde-lana):

Bigarren ikasgaia, bigarren bilduma

Mar8 - Mar14

Martxoak 8:

2.7.- Funtzio implizituak

Aldagai aske bakarrekoko funtzio implizituak, deribazioa.

Adibidea:

$\varphi(x,y)=\sin(x \cdot y)$ ekuazioak mugatutako funtzio implizitua $(1,\pi)$ puntuaren inguruan, $(1,2\pi)$ puntuaren inguruan, eta $(0,\pi)$ puntuaren inguruan

Martxoak 9:

$\varphi(x,y,z)=e^x + \ln y + 3(z-1)^2 = K$ ekuazioa emanda, K-ren balioa $z=f(x,y)$ funtzio

implizitua existitu dadin $(0,1,0)$ puntuaren inguruan. z-ren hurbilketa lineala puntu horren inguruan.

$\varphi(x,y,z)=x^2 + 3y + x \cdot z^2 = 0$ ekuazioa emanda, zein aldagai da beste bien funtzio

implizitua $(0,0,0)$ puntuaren inguruan?

2.8.- Funtzio homogeneoak

Definizioa

Adibideak: $z = x^2 + xy + y^2$ ($m=2$)

$z = \sqrt{2x + y}$ ($m=1/2$)

$z = 2x + xy$ (ez homogeneoa)

$z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ ($m=-2$)

Martxoak 10:

Funtzio homogeneoen propietateak:

- Deribatu partzialak ere homogeneoak dira
- Euler-en teorema

$Q(K,L)=320\sqrt[4]{K^3L}$ ekoizpen funtzioa emanda, eskala-errendimendu

konstanteak dituela frogatu. Produktibitate marjinalak ere homogeneoak dira? Euler-en teorema egiaztatzen dela frogatu.

$f(1,1)=1$; $f_x(2,2)=48$; $m=3 \Rightarrow f(2,2)=8$; $f_y(2,2)=-36$; $f_y(1,1)=-9$

Martxoak 11 (talde-lana):

Bigarren ikasgaia, Hirugarren bilduma

Mar15 - Mar21

Martxoak 15:

3.- ALDAGAI ASKE BATEKO FUNTZIOEN HOBERENATZEA

3.1.- Hoberen motak: definizioak, adibideak

3.2.- Hoberen lokalerako beharrezko baldintza

3.3.- Hoberen lokalerako baldintza nahikoak

Martxoak 16:

3.4.- Funtzio ganbil eta ahurrak. Inflexio-puntuak

Adibideak: Enpresa baten kostua $K(q) = \frac{q^2}{8} + 4q + 200$; eskaria $p(q) = 49 - q \Rightarrow$

Mozkinak maximotu: $q^* = 20$, $M^* = 250$

Adibideak: Laugarren mailako polinomio batek hoberen lokal bat du (1,3) puntuan, eta inflexio-puntut bat (0,0) puntuan, azken honetan zuzen ukitzalea $y = 2x$ izanik $\Rightarrow$

$$f(x) = -5x^4 + 6x^3 + 2x$$

Martxoak 17:

3.5.- Hoberen globalerako baldintza nahikoak

Adibideak:

- $f(x) = x^4 - x^3$

- Irrati-kate baten audientzia %tan, 17:00ak eta x ordu beranduago:

$$f(x) = \frac{1}{8}(-2x^3 + 27x^2 - 108x + 240) \Rightarrow \text{Audientzia max eta min 17:00ak eta}$$

gauerdia bitartean: $A_{\max} = \%30$ ($x=0$) ; $A_{\min} = \%13.125$ ($x=3$)

- $f(x) = x \cdot (\ln x)^2$ funtzioaren azterketa egin

Martxoak 18, jai eguna

Mar22 - Mar28

Martxoak 22 (talde-lana):

(aurreko osteguna jai-eguna izan zelako, talde guztiak ordu berean)

Hirugarren ikasgaiko ariketak hasi

Martxoak 23:

4.- HOBERENATZE EZ BALDINTZATUA

4.1.- Planteamendua

4.2.- Topologia nozioak:

Bola irekia: $(3, 1)$ eta $(3, 1.2)$ puntuak $B_{0.5}(3, 1)$ bolakoak dira?

Barne-, muga-, kanpo-puntuak; Multzo irekia, itxia

Multzo bornatua; konbexua

Adibideak: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 1 \wedge y < 5\}$, A , A^c , $\text{bn}(A)$, $\text{mg}(A) = \text{mg}(A^c)$, $\text{kp}(A)$

Martxoak 24:

Topologia, adibideak:

Adibideak: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 25\}$,

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 5 - x^2\}$

4.3.- Hoberen motak. Definizioak. Adibide grafikoak

Muturreko balioen teorema

Martxoak 25 (talde-lana):

Bigarren ikasgaiko (lehen bilduma) ariketak zuzendu, talde bakoitzak beste talde batena

Hirugarren ikasgaiko ariketak bukatu

Api12 - Api18

Apirilak 12:

4.4.- Hoberen lokalerako baldintza beharrezkoa

$$\text{Adibidea: } f(x,y)=x^3+y^3-9xy+27 \Rightarrow \text{Puntu gerakorrak: } (0,0), (3,3)$$

4.5.- Forma koadratikoak

Definizioa

Forma koadratikoaren adierazpen matriziala. Adibideak:

$$Q(x,y,z)=2x^2-y^2+6xy-2xz+10yz$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Apirilak 13:

Forma koadratikoen sailkapena.

Autobalioen irizpidea. Minore nagusien irizpidea

Adibideak:

$$Q(x,y,z)=2x^2-2xy+y^2-2xz+z^2$$

$$Q(x,y,z)=-x^2-y^2-z^2+2xz$$

$$Q(x,y,z)=-5x^2-4y^2-z^2$$

$$Q(x,y)=2x^2-2xy+3y^2$$

Apirilak 14:

4.6.- Hoberen lokalerako baldintza nahikoak. Frogapena

Adibideak:

$$f(x,y)=x^2+y^2-9xy+27 \Rightarrow (0,0,27) \text{ zela-puntua; } (3,3,0) \text{ minimo lokal hertsia}$$

$$f(x,y)=3x^2+3y^2-3x-6y \Rightarrow (1,\sqrt{2}) \text{ mlh, } (1,-\sqrt{2}) \text{ zp, } (-1,\sqrt{2}) \text{ zp, } (-1,-\sqrt{2})$$

Mlh

$$f(x,y)=x^2-4xy^2+3y^4 \Rightarrow (0,0) \text{ zalantzazko kasua (grafikoan: zela-puntua)}$$

Apirilak 15 (talde-lana):

Laugarren ikasgaiko ariketak egiten hasi

Api19 - Api25

Apirilak 19:

4.7.- Funtzio ahur eta ganbilak. Hoberen globalerako baldintza nahikoak

$$f(x,y,z)=x+2y+yz-x^2-y^2-z^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ Mgh}$$

Esnetegi batean bi esne mota egiten dira, osoa (x) eta gaingabetua (y). Esne osoaren eskaria: $p_1(x) = 100 - x$, eta esne gaingabetuaren eskaria: $p_2(y) = 100 - y$. Kostuak:

$$K(x,y) = x^2 + xy + y^2. \text{ Mozkinak maximizatu}$$

Apirilak 20:

hob $f(x,y) = e^{x+y} + e^{-x-y} \Rightarrow y = -x$ (erdi-definitu) puntuak min global erlatiboak

$$\text{hob } f(x,y) = e^x - x + e^{2y} - y \Rightarrow \left(0, \frac{1}{2} \ln(1/2)\right) \text{ min global hertsia}$$

Apirilak 21:

$$\text{hob } f(x,y) = x^2 + y^2 - 2 \ln(x) - 18 \ln(y) \Rightarrow (1, 3) \text{ min global hertsia}$$

$$\text{hob } f(x,y) = 2x + 2y - x^2 \cdot y^2 \Rightarrow (1, 1) \text{ zela-puntua}$$

$$\text{hob } f(x,y) = (2-x)e^x + (3-y)e^y \Rightarrow (1, 2) \text{ max lokal hertsia}$$

Apirilak 22 (talde-lana):

Laugarren ikasgaiko ariketak bukatu

Liburuetatik aukeratutako ariketak egin

Api26 - Mai2

Apirilak 26:

5.- HOBERENATZE BALDINTZATUA

5.1.- Planteamendua

5.2.- Dimentsio txikiko problemen ebazpen grafikoa

$$\left. \begin{array}{l} \text{hob } f(x,y)=x+y \\ \text{o.l. } x^2-y \leq 0 \\ x-y \geq -2 \end{array} \right\} \Rightarrow (2,4) \text{ M.g.h. , } (-0.5, 0.25) \text{ m.g.h}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{hob } f(x,y)=x+y \\ \text{o.l. } x^2-y < 0 \\ x-y > -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{soluziorik ez (multzo irekia)}$$

Apirilak 27:

$$\left. \begin{array}{l} \text{hob } f(x,y)=x^2+y^2 \\ \text{o.l. } -5 \leq x \leq 5 \\ -5 \leq y \leq 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (0,0) \text{ m.g.h.} \\ (5,5) (5,-5) (-5,5) (-5,-5) \text{ M.g.e.} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{hob } f(x,y)=x \cdot y \\ \text{o.l. } x^2+y^2 \leq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1,1) , (-1,-1) \text{ M.g.e.} \\ (1,-1) , (-1,1) \text{ m.g.e.} \end{array} \right. ; (0,0) \text{ zela-ptua}$$

Apirilak 28:

5.3.- Ebazpen metodo zuzena, aldagaiak ordezkatzuz

$$\left. \begin{array}{l} \text{hob } f(x,y)=x+y \\ \text{o.l. } x^2+y=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right) \text{ M.g.h. } f^*=5/4; \text{ minimorako ez bornatua}$$

5.4.- Lagrangeren biderkatzaileen metodoa

Funtzio lagrangearra

Hoberen lokalerako beharrezko baldintza (frogapena)

$$\left. \begin{array}{l} \text{hob } f(x,y)=x+y \\ \text{o.l. } x^2+y=1 \end{array} \right\} \text{Lagrangearraren metodoaz (puntu gerakorrak lortu)}$$

Apirilak 29 (talde-lana):

Bosgarren ikasgaiko ariketak egiten hasi

Mai3 - Mai9

Maiatzak 3:

Funtzio lagrangearra: hoberen lokalerako baldintza nahikoak

$$\left. \begin{array}{l} \text{hob } f(x,y)=x+y \\ \text{o.l. } x^2+y=1 \end{array} \right\}, \text{ Lagrangearraren metodoaz (maximoa aurkitu)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{hob } f(x,y)=x \cdot y \\ \text{o.l. } x+y=6 \end{array} \right\} (\text{hiru metodoez}) \Rightarrow (x,y)=(3,3) \text{ M.g.h., } f^*=9$$

Maiatzak 4:

$$\left. \begin{array}{l} \text{hob } f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \\ \text{o.l. } 4x+y^2+2z-14=0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x,y,z,\lambda)^*_1=(2,2,1,1) \text{ min.lok.herts.}; f^*_1=9 \\ (x,y,z,\lambda)^*_2=(2,-2,1,1) \text{ min.lok.herts.}; f^*_2=9 \\ (x,y,z,\lambda)^*_3=(2.8,0,1.4,1.4) \text{ zalantza}; f^*=9.8 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{hob } f(x,y)=x^2+y^2 \\ \text{o.l. } x^2+(y-2)^2=1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x,y,\lambda)^*_1=(0,3,3) \text{ M.l.h (eta M.g.h) } f^*=9 \\ (x,y,\lambda)^*_2=(0,1,-1) \text{ m.l.h (eta m.g.h) } f^*=1 \end{array} \right. (\text{hiru metodoez})$$

Maiatzak 5:

5.6.- Lagrangeren biderkatzaileen esanahia

$$\text{Frogapena, } \lambda\text{-ren esanahia azken ariketan: } \left. \begin{array}{l} \text{hob } f(x,y)=x^2+y^2 \\ \text{o.l. } x^2+(y-2)^2=1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{hob } f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2 \\ \text{o.l. } \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y-z=1 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow (x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=(2,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{2},\frac{3}{2}) \text{ min.lok.hertsia}$$

Maiatzak 6 (talde-lana):

Bosgarren ikasgaiko ariketak jarraitu

Mai10 - Mai16

Maiatzak 10:

Max Mozkinak: $M(q_1, q_2) = ST - KT = 10q_1 + 20q_2 - (q_1^2 + q_2^2)$

a) murrizketarik gabe: $(q_1, q_2)^* = (5, 10)$ Max lokalala (globala ere), $M^* = 125$

b) o.l. $q_1 + q_2 = 9 \Rightarrow (q_1, q_2, \lambda)^* = (2, 7, 6)$ Max. lokala, $M^* = 107$

$\Delta b = 1 \Rightarrow M^*_{\text{berria}} \approx 113$

Maiatzak 11:

Hiru lantegietako kostu funtzioak: $K_1(x) = 200 + \frac{x^2}{100}$; $K_2(y) = 200 + y + \frac{y^3}{300}$;

$K_3(z) = 200 + 10z$. Hornitu beharreko eskaria: 2000 unitate. Kostuak minimizatu.

$\Rightarrow (x, y, z)^* = (500, 30, 1470)$, $KT^* = 17920$, eskaria 5 unitate gutxiago $\Rightarrow$

$KT^*_{\text{berria}} \approx 17870$

Azterketa zaharretako ariketak begiratu

Maiatzak 12:

6.- PROGRAMAZIO LINEALA

6.1.- Planteamendua. Forma kanonikoa eta forma estandarra

6.2.- Neurri txikiko ariketen ebazpena

Adibideak:

$\max 3x + y$	$\min 40x + 80y$	$\min 60x + 80y$	$\min 80x + 80y$
o.l. $x + y \leq 6$	o.l. $3x + 4y \geq 24$	o.l. $3x + 4y \geq 24$	o.l. $3x + 4y \geq 24$
$-2y \geq -8$	$2x + 6y \geq 24$	$2x + 6y \geq 24$	$2x + 6y \geq 24$
$x \geq 0, y \geq 0$	$x \geq 0, y \geq 0$	$x \geq 0, y \geq 0$	$x \geq 0, y \geq 0$

(GLP programaren bidez ere soluzioak bilatu, gradientea aldatu soluzio berriak topatzeko)

Maiatzak 13 (talde-lana):

Bosgarren ikasgaiko ariketak bukatu

Mai17 - Mai23

Maiatzak 17:

6.3.- Soluzio egingarriak eta mutur-puntuak

Soluzio aukera desberdinak ikusi

Adibideak:

$$\begin{array}{ll} \max -x_1 - x_2 & \min 8x - 2y \\ \text{o.l. } x_1 - x_2 \geq 1 & \text{o.l. } 4x - y \geq 12 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 & 2x + 4y \geq 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

$$\max 24x + 8y$$

$$2x + 5y \leq 40$$

$$\text{Altzairu ekoizlearen adibidea: o.l. } 4x + y \leq 20$$

$$10x + 5y \leq 60$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Maiatzak 18:

6.5.- Dualtasunaren teoria

Programa duala

Lasaitze-osagarriaren teorema

Dualaren soluzioaren esanahia

Adibideak: altzairu ekoizlearena

Maiatzak 19:

Etxebizitzaren adibidea:

$$\begin{array}{l} \min z = 1200x_1 + 3000x_2 + 300x_3 + 150x_4 \\ \left. \begin{array}{l} 2x_1 + 8x_2 + x_3 \geq 70 \\ \text{o.l. } 3x_1 + 6x_2 + x_4 \geq 30 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 5 \\ x_3^* = 30 \\ x_4^* = 0 \end{cases} \end{array}$$

Dualaren esanahia aztertu

Maiatzak 20 (talde-lana):

Seigarren ikasgaiko ariketak egiten hasi

MaI24 - Mai30

Maiatzak 24:

Etxebizitzaren adibidea: Lindo programaren soluzioa (primala eta duala)

Adibideak:

$$\max x+y$$

$$\text{o.l. } 2x+y \leq 10$$

$$3x+y \leq 10$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Bornatua, soluzio bakarra (Duala: bornatua, soluzio anitzak)

$$\max x+y$$

$$\text{o.l. } y \leq 3$$

$$x+y \leq 6$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Bornatua, soluzio anitzak (Duala: bornatua, soluzio bakarra)

Maiatzak 25:

Sektore publikoko langileen greba

Maiatzak 26:

Ongarrien nahasketaren adibidea:

$$\min 120x+60y$$

$$3x+y \geq 15$$

$$\text{o.l. } x+5y \geq 20$$

$$3x+2y \geq 24$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^*=2 \\ y^*=9 \end{cases} \quad (\text{dualaren esanahia aztertu})$$

Maiatzak 27 (talde-lana):

Seigarren ikasgaiko ariketak bukatu eta entregatu

Azken oharrak

**Lehen ikasgaia: Aldagai anitzeko funtzioak****1.- Aldagai anitzeko funtzioak: definizioa**

$y = f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funtzioa $\mathcal{R}^n$ multzoko E azpimultzotik zenbaki errealeen I azpimultzora doan aplikazioa da, $f : E \subset \mathcal{R}^n \rightarrow I \subset \mathcal{R}$; bertan, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ da n aldagai askeen bektorea, eta y menpeko aldagaia. Aplikazio bat izanik, aldagai askeen bektore bakoitzari irudi bakarria dagokio.

f hizkiak eragiketa matematiko bat adierazten du, E funtzioaren izate-eremua da (f eragiketa egin ahal izateko bektoreen multzoa), eta I funtzioaren irudia (izate-eremuk bektoreetarako irudien multzoa).

2.- Adierazpen grafikoa. Maila-kurbak

Aldagai bakoitzeko ardatz bat beharrezkoa denez funtzioaren irudia egiteko, soilik bi aldagai aske dituzten $y = f(x_1, x_2)$ funtzioen adierazpen grafikoa egin daiteke: aldagai aske bana plano horizontalaren ardatz bakoitzean adierazten da, eta menpeko aldagaia ardatz bertikalean. Ondorioz, hiru dimentsioko espazioan, $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ hirukoteek osatzen duten azalera izango da funtzioaren adierazpen grafikoa.

Mota honetako irudiak egiteak marrazketarako trebezia eskatzen duenez (ordenadorez erraz egin badaitezke ere), badago beste modu bat bi aldagai aske dituzten funtzioen izaera grafikoki adierazteko, maila-kurben bidez: plano batean bi aldagai askeak ezartzen ditugu ardatz kartesiarretan, eta y_0 irudi bera ematen duten puntuak lotu, kurba bat osatzeko: $y_0 = f(x_1, x_2)$.

Hainbat iruditarako, planoan marraztutako honelako kurben multzoak erakusten du funtzioaren proiektzioa planoaren gainean, kartografian mendilerroak adierazteko egiten denaren antzera.

3.- Funtzio jarraiak. Ohiko funtzio jarraiak

$\vec{x}_0$ puntuan, n aldagai aske dituen $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funtzioa jarraia dela esango dugu, puntu horretara nahi adina hurbildu ezkerro, irudiek $f(\vec{x}_0)$ baliorantz jotzen badute. Funtzio bat jarraia da puntu-multzo batean, multzo horretako puntu guztietan jarraia bada.

Ohiko funtzio jarraiak: aldagai aske bakarreko funtzioetan ikusten den moduan, funtzio jarraien konposaketak jarraiak dira. Hori dela eta, bi aldagai askeko funtzioetan $y = f(x_1, x_2) = x_1$ funtzioa jarraia izanik, jarraia izango dira honakoak ere (adibidez): $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ eta



$y = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. Baita ere berreketak eta polinomioak, $y = f(x_1, x_2) = a \cdot x_1^n \cdot x_2^m$, eta mota honetako funtzioen batura. Oro har, haien izate-eremuetan jarraiak dira polinomioen baturak, biderkadurak, zatidurak, logaritmoak, sinua, kosinua, eta bestelako funtzio jarraien konposaketak. Kontutan hartu funtzio bat jarraia izan dadin puntu batean, beharrezko baldintza dela (baina ez nahikoa) funtzioa puntu horretan definitua egotea, alegia, puntu hori izate-eremukoa izatea.

Lehen ikasgaia

- 1) Ondoko funtzioen izate-eremua lortu eta grafikoki adierazi:

a) $y = \frac{2x_1 + x_2^2}{x_1 - x_2}$

b) $z = \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2 - 1}$

c) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$

d) $z = \sqrt{x-1} + \sqrt{y}$

e) $z = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}} + \sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$

f) $y = \ln \frac{x_1^2}{x_2 - x_1^2}$

g) $y = \left(\frac{x_1}{x_2^2 - x_1} \right)^{\frac{1}{3}}$

- 2) Ondoko funtzioen izate-eremua eta maila-kurbak planoan adierazi:

a) $y = x_1^2 + x_2^2$;

b) $z = x^2 + y^2 - 4$;

c) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;

d) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

e) $z = \ln xy$

f) $z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2$

g) $y = \ln(x_1 + x_2)$;

h) $y = 30 - 6x_1^2 - 6x_2^2$

i) $y = \ln(x_2^2 - x_1)$

j) $y = \sqrt{\ln x_1 x_2}$

k) $z = e^x - y$;

l) $z = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$;

m) $z = 3^{-\frac{1}{x^2 - y^2}}$

- 3) Ondorengo funtzioen izate-eremuak lortu, eta adierazten diren puntuetatik pasatzen diren maila-kurbak marraztu:

a) $z = \ln(x^2 + y^2 - 5)$: $(\sqrt{5}, 0)$; $(6, 0)$.

b) $z = y - x^2$; $(1, 1)$, $(0, 1)$.

c) $z = (x-1)^2 + y^2$; $(1, 1)$, $(2, 1)$.

- 4) Enpresa batek bi ondasun mota ekoizten du. Bere urteko mozkina, mota bakoitzeko saldutako
- (x_1, x_2)
- kopuruen arabera, hau da:

$$M(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 100$$

Isomozkinen kurbak marraztu, balio hauetarako: $M=100$; $M=200$; $M=300$



- 5) Herrialde bateko enpresek honako ekuazioaren arabera finkatzen dute haien ondasunen prezioa: $P = (1+a)\frac{x}{y}$, x izanik lanaren produktibitatea, y soldata monetarioa eta a mozkinen kopuru konstantea.
- Enpresek $a=3$ finkatzen badute, zein dira $P=8$ egiten duten (x,y) balioak? Grafikoki adierazi.

- 6) Ondoko funtzioen jarraitasuna aztertu:

a) $y = \frac{x_2}{x_1}$; b) $z = 5x^3 - x^3 \cdot y$; c) $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$;

d) $z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; e) $y = \frac{x_1 + x_2 - x_3}{x_1 + x_2 + x_3}$; f) $z = \frac{x^2 y}{\ln(x^4 + y^2)}$; g) $z = e^{\frac{xy}{x^2 - y^2}}$

- 7) Hurrengo funtzioa $(1,2)$ puntuan jarraia ote den aztertu. Etengune guztiak planoan adierazi:

$$f(x,y) = \frac{3-x-y}{3+x-2y}$$

- 8) Honako funtzioen jarraitasuna aztertu:

a)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y + 5}{(x^2 + y)^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+y^2} & ; (x,y) \neq (1,1) \\ 1 & ; (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

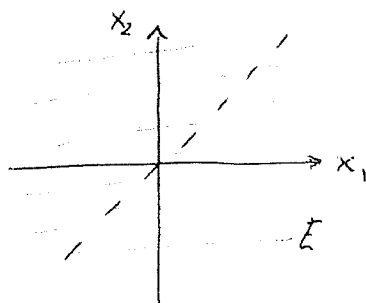
ENPREŠARAKO MATEMATIKAK II

Lehen ikasgia

①

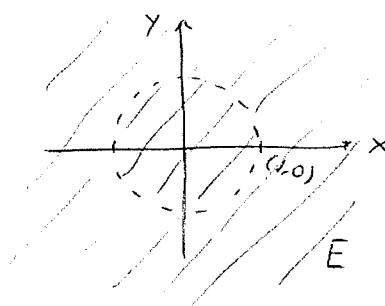
1.- a) $y = \frac{2x_1 + x_2^2}{x_1 - x_2}$

$$E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \neq x_2\}$$



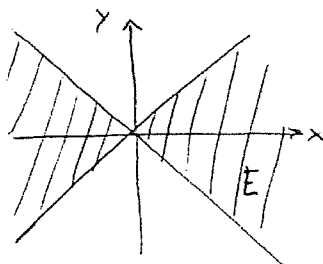
b) $z = \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2 - 1}$

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \neq 1\}$$



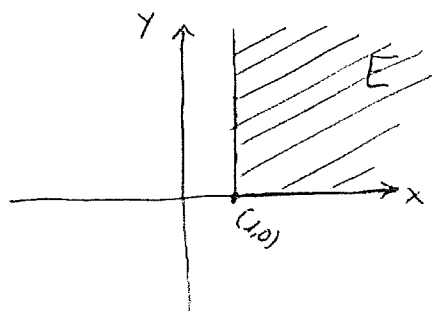
c) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \geq |y|\}$$



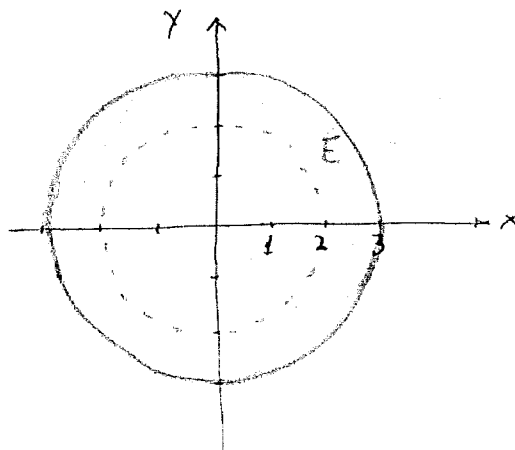
d) $z = \sqrt{x-1} + \sqrt{y}$

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 1 \text{ eta } y \geq 0\}$$



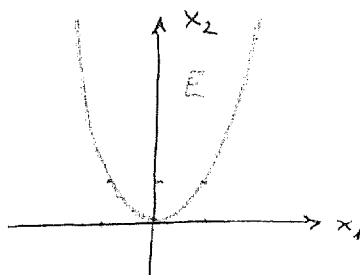
e) $z = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}} + \sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4 < x^2 + y^2 \leq 9\}$$

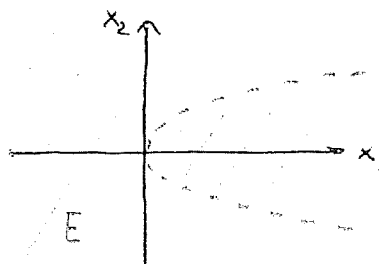


f) $y = \ln \frac{x_1^2}{x_2 - x_1^2}$

$E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 > x_1^2\}$



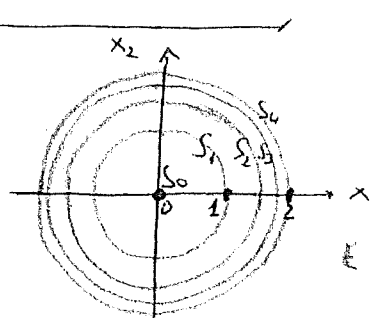
g) $y = \left(\frac{x_1}{x_2^2 - x_1}\right)^{1/3}$



2.- a) $y = x_1^2 + x_2^2$

$S_K: x_1^2 + x_2^2 = K$

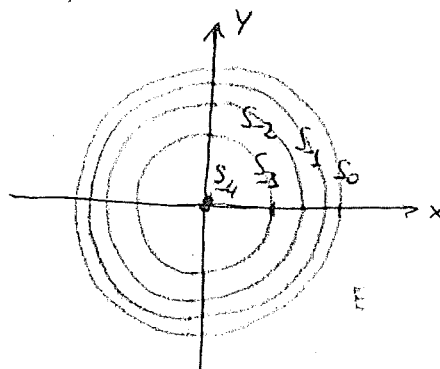
$E = \mathbb{R}^2$



b) $z = x^2 + y^2 - 4$

$E = \mathbb{R}^2$

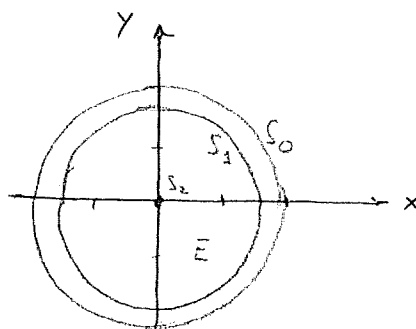
$S_K: x^2 + y^2 - 4 = K$



c) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$

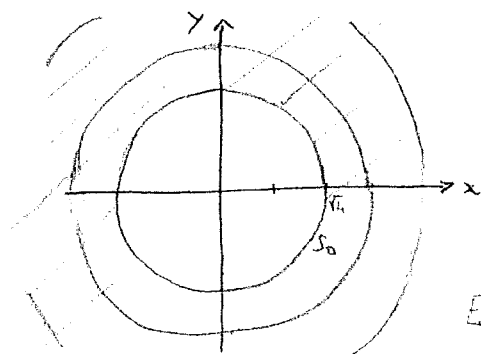
$S_K: \sqrt{4 - x^2 - y^2} = K$



d) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 4\}$

$S_K: \sqrt{x^2 + y^2 - 4} = K$

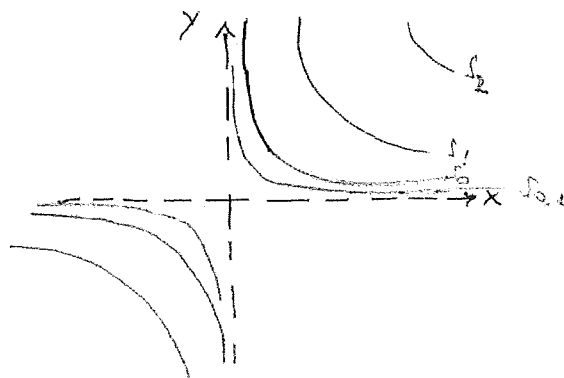


(3)

e) $z = \ln xy$

$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \cdot y > 0\}$

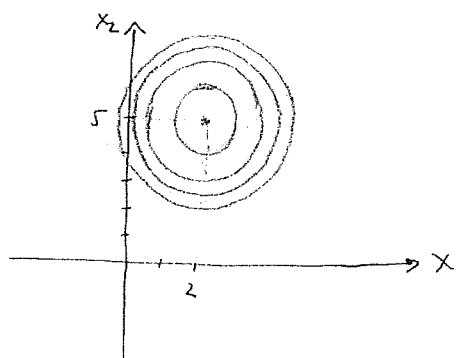
$S_k: \ln xy = k \Leftrightarrow xy = e^k$



f) $z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2$

$E = \mathbb{R}^2$

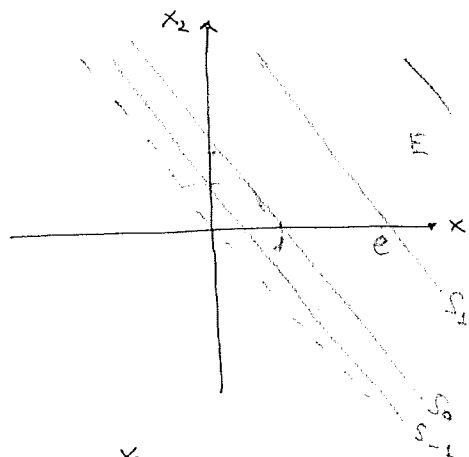
$S_k: (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2 = k$



g) $y = \ln(x_1 + x_2)$

$E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 > -x_2\}$

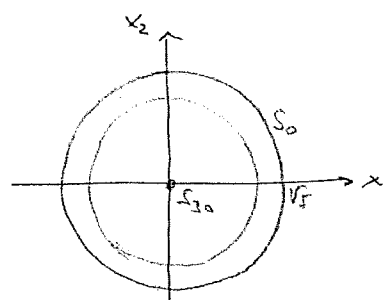
$S_k: \ln(x_1 + x_2) = k \Leftrightarrow x_2 = -x_1 + e^k$



h) $y = 30 - 6x_1^2 - 6x_2^2$

$E = \mathbb{R}^2$

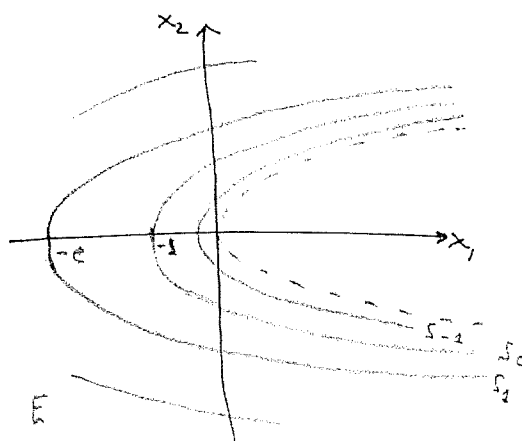
$S_k: 30 - 6x_1^2 - 6x_2^2 = k \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 5 - \frac{k}{6}$



i) $y = \ln(x_2^2 - x_1)$

$E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2^2 > x_1\}$

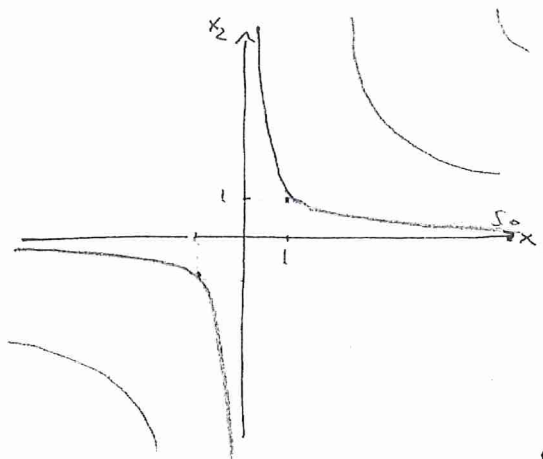
$S_k: \ln(x_2^2 - x_1) = k \Leftrightarrow x_2 = \pm \sqrt{e^k + x_1}$



j) $y = \sqrt{\ln x, x_2}$

$E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 \geq \frac{1}{x_1}\}$

$S_k: \sqrt{\ln x, x_2} = k \Leftrightarrow x_2 = \frac{e^{k^2}}{x_1}$

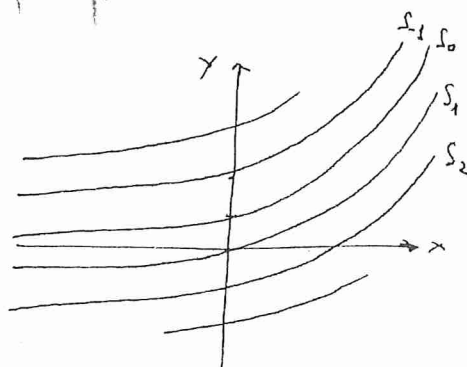


(4)

k) $z = e^x - y$

$E = \mathbb{R}^2$

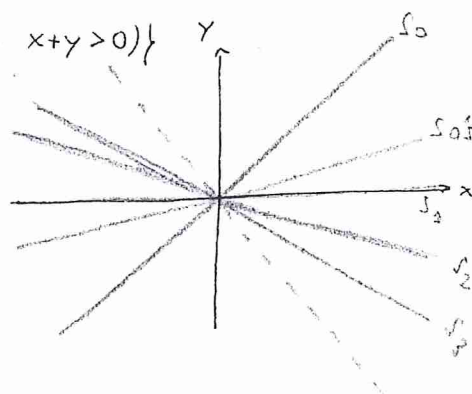
$S_k: e^x - y = k \Leftrightarrow y = e^x - k$



l) $z = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$

$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x-y \geq 0 \text{ et } x+y > 0) \text{ et } (x-y \leq 0 \text{ et } x+y > 0)\}$

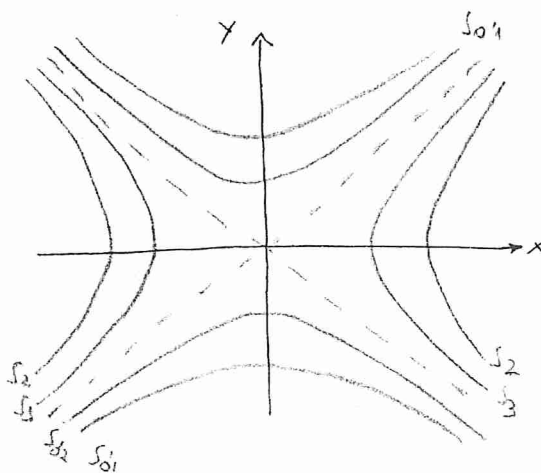
$S_k: \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = k \Leftrightarrow y = \frac{(1-k^2)}{(1+k^2)} \cdot x$



m) $z = 3 \frac{1}{x^2 - y^2}$

$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \neq |y|\}$

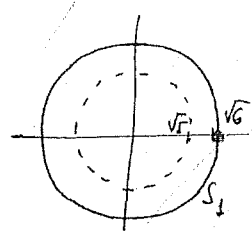
$S_k: 3 \frac{1}{x^2 - y^2} = k \Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 - \frac{\ln 3}{\ln k}}$



3.- a) $z = \ln(x^2 + y^2 - 5)$ $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 5\}$

$\nabla z(\sqrt{5}, 0) = \ln 0$

$z(\sqrt{6}, 0) = \ln 1 = 0 \Rightarrow S_0: \ln(x^2 + y^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 5 = 1$

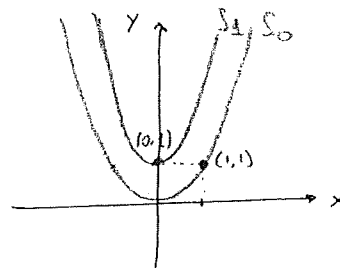


b) $z(y, x) = y - x^2$

$E = \mathbb{R}^2$

$z(1, 1) = 0 \Rightarrow S_0: y = x^2$

$z(0, 1) = 1 \Rightarrow S_1: y = 1 + x^2$

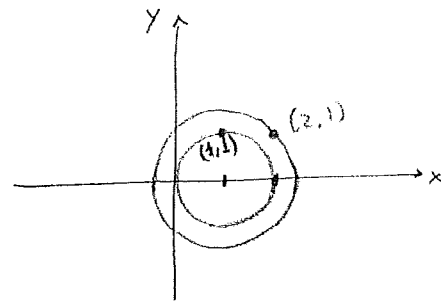


c) $z(x, y) = (x-1)^2 + y^2$

$E = \mathbb{R}^2$

$z(1, 1) = 1 \Rightarrow S_1: (x-1)^2 + y^2 = 1$

$z(2, 1) = 2 \Rightarrow S_2: (x-1)^2 + y^2 = 2$

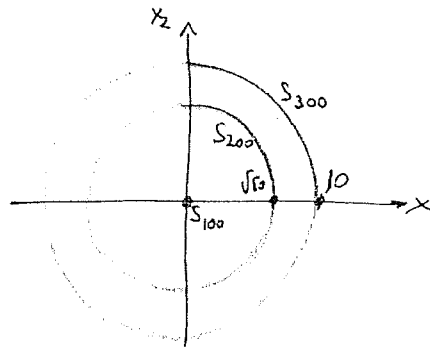


4.- $M(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 100$

$M=100 \Rightarrow S_{100}: x_1^2 + x_2^2 = 0$

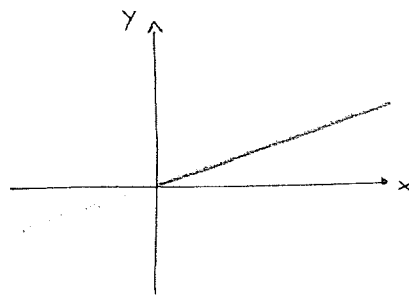
$M=200 \Rightarrow S_{200}: x_1^2 + x_2^2 = 50$

$M=300 \Rightarrow S_{300}: x_1^2 + x_2^2 = 100$



5.- $P = (1+a) \cdot \frac{x}{y}$; $a=3 \Rightarrow P = \frac{4x}{y}$

$$\frac{4x}{y} = 8 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

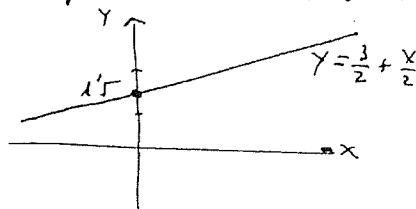


- 6.-
- a) jarraia bide izate-eremuan, $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \neq 0\}$
 - b) jarraia $\mathbb{R}^2$ osoan
 - c) jarraia izate-eremuan, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) \neq (0, 0)\}$
 - d) jarraia izate-eremuan, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| > |y|\}$
 - e) jarraia izate-eremuan, $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 \neq 0\}$
 - f) jarraia izate-eremuan, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) \neq (0, 0) \wedge y \neq \sqrt{1-x^2}\}$
 - g) jarraia izate-eremuan, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \neq |y|\}$

Jarraiak dira bideen izate-eremuetan funtzio jarraien konposaketak direlako

7.- $f(x, y) = \frac{3-x-y}{3+x-2y}$; $f(1, 2)$ berriz, puntu horretan eta da jarraia

Eten funtzioak : $3+x-2y=0$



8.- a) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq x^2\} \cup (0, 0)$

$y=x^2$ bada eta dago erudirik (eta funtzioa eta da jarraia), $(0,0)$ puntuan erik, non erudirik $\downarrow$ balio du, baina

lim $f(x, y) = +\infty$ da, berriz hori ere eta da jarraia.

Ondorioz, $f(x, y)$ jarraia da $y \neq x^2$ betetzen duten puntuetan.

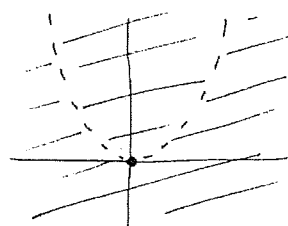
b) $E = \mathbb{R}^2$

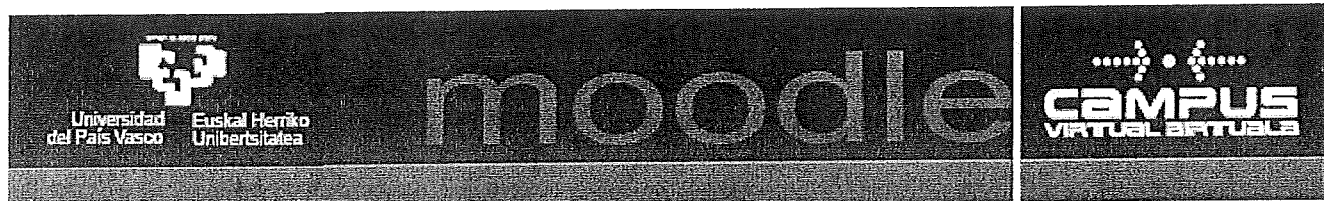
$(1, 1)$ puntuan : $f(1, 1) = 1$

lim $f(x, y) = 1/2$
 $(x, y) \rightarrow (1, 1)$

$(1, 1)$ puntuan funtzioa eta da jarraia

Gainerako puntuetan, bi polinomioen zatidura izanik, eta zatitzailea anula ez dena, jarraia da





moodle ► 251_EMPRE302_08308_32 ► Zereginak ► 1. ikasgaia

[Zeregina eguneratu](#)Taldeok elkar ikusten dute [Partaide guztiak](#)

Inor ez da saiatu zeregin honetan oraindik

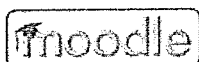
Enpresarako Matematikak II

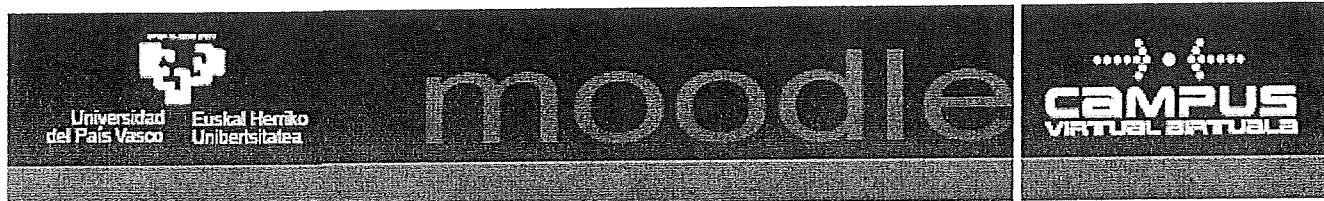
Lehen ikasgaia: otsailaren 11 eta 18a

Aurkezteko azken eguna: otsailaren 24a

Taldea	Ariketak									
	Lehen eguna					Bigarren eguna				
1	1a	1b	2a	2b	3a	3b	4	5	6a	8a
2	1b	1d	2b	2d	3b	3c	5	4	6c	8b
3	1c	1f	2c	2f	3c	3a	4	5	6b	7
4	1d	1a	2d	2h	3a	3b	5	4	6a	8a
5	1e	1c	2e	2j	3b	3c	4	5	6g	8b
6	1f	1g	2f	2k	3c	3a	5	4	6f	7
7	1g	1e	2g	2m	3a	3b	4	5	6e	8a
8	1a	1b	2h	2a	3b	3c	5	4	6d	8b
9	1b	1d	2i	2c	3c	3a	4	5	6c	7
10	1c	1f	2j	2e	3a	3b	5	4	6b	8a
11	1d	1a	2k	2g	3b	3c	4	5	6a	8b
12	1e	1c	2l	2i	3c	3a	5	4	6e	7
13	1f	1g	2m	2k	3a	3b	4	5	6g	8a
14	1a	1b	2a	2b	3a	3b	5	4	6f	8b
15	1b	1d	2b	2d	3b	3c	4	5	6d	7
16	1c	1f	2c	2f	3c	3a	5	4	6c	8a
17	1d	1a	2d	2h	3a	3b	4	5	6b	8b
18	1e	1c	2e	2j	3b	3c	5	4	6a	7

Entregatze-data: asteazkena, 2010(e)ko otsaila(r)en 24(a)n, 17:00(e)tan



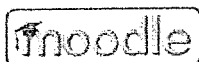
[moodle](#) ► [251_EMPRE302_08308_32](#) ► [Zereginak](#) ► [1. ikasgaia, LIBURUAK](#)[Zeregina eguneratu](#)Taldeok elkar ikusten dute [Partaide guztiak](#)**Inor ez da saiatu zeregin honetan oraindik**

Otsailaren 25erako, Bibliotekatik liburu hauek eskuratu:

- A) HOFFMANN, L.D., BRADLEY, G.L.: Cálculo, McGraw-Hill, Bogotá, 2004
- B) STEWART, J.: Cálculo, Conceptos y contextos, Thomson, 1998
- C) STEWART, J.: Cálculo multivariable, Thomson, 1998
- D) SYDSAETER, K., HAMMOND, P.: Matemáticas para el análisis económico, Prentice Hall, Madrid, 1996
- E) ALEGRE, P. eta beste: Ejercicios resueltos de Matemáticas empresariales 2, AC, Madrid, 1993

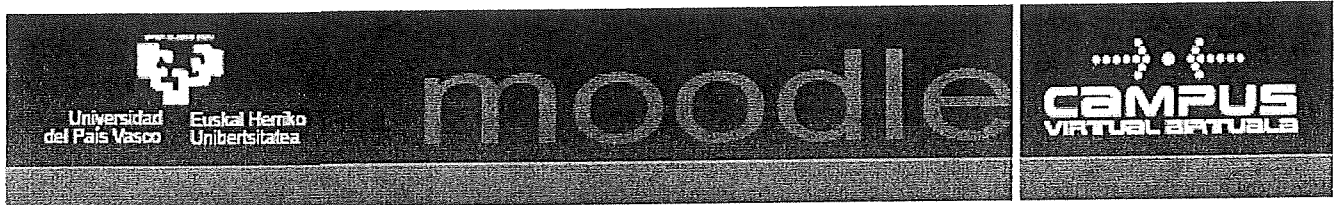
- A liburua talde hauek hartuko dute: 1, 2, 3
- B liburua talde hauek hartuko dute: 4, 5, 6
- C liburua talde hauek hartuko dute: 7, 8, 9, 10
- D liburua talde hauek hartuko dute: 11, 12, 13
- E liburua talde hauek hartuko dute: 14, 15, 16

Ikasle talde bakoitzak aukeratu behar ditu bi ariketa tokatu zaion liburuan, bi aldagai askeko funtzioen izate-eremuak eta maila-kurbak kalkulatzeko eta grafikoki adierazteko

Entregatze-data: asteazkena, 2010(e)ko martxoa(r)en 3(a)n, 13:00(e)tan

JOSE MARIA ZENDOIA SAINZ barruan da (Irten)

Validate HTML | Section 508 Check | WCAG 1 (2,3) Check



moodle ► 251_EMPRE302_08308_32 ► Galdetegiak ► Maila-kurbak ► 1 saiakera

[Galdetegia eguneratu](#)[Informazioa](#)[E-mailtzak](#)[Aurreikusi](#)[Editatu](#)

Maila-kurbak aurreikusi

[Hasi berriro](#)

Oharra: zure ikasleek ezin dute eskuratu orain galdetegi hau

1 Bi aldagai aske dituen funtzio bat emanda, bere bi maila-kurba desberdin gurutzatu daitezke planoan?

Puntuak:

--/10

Aukeratu
erantzun
bat

- ☐ A. Bai
- ☐ B. Ez
- ☐ C. Funtzio batzuetan bai, besteetan ez

[Bidali](#)

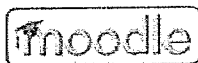
2 Zergatik?

Puntuak:

--/10

Aukeratu
erantzun
bat

- ☐ A. Aldagai anitzeko funtzio batean, bere izate-eremuko puntu batek irudi anitz eduki ditzakeelako
- ☐ B. Funtzio bakoitzaren ezaugarriak desberdinak direlako
- ☐ C. Izate-eremuko puntu batek soilik irudi bat eduki dezakeelako

[Bidali](#)[Gorde bidali gabe](#)[Orria bidali](#)[Bidali dena eta bukatu](#)

JOSE MARIA ZENDOIA SAINZ barruan da (Irten)

[Validate HTML](#) | [Section 508 Check](#) | [WCAG 1 \(2,3\) Check](#)

Bigarren ikasgaia (III)

- 1.- $\sin(x+y) + e^{xy} = 1$ ekuazioak, definitzen al du y aldagaia x aldagaiaren funtzio implizitu bezala, $(x,y)=(0,\pi)$ puntuaren inguruan? Hala bada, $\frac{dy}{dx}$ kalkulatu.
- 2.- $\cos(xy) - e^{xy} - x^2y = 0$ ekuazioak x aldagaia y aldagaiaren funtzio implizitu gisa mugatzen ote duen esan $(x,y)=(1,0)$ puntuaren inguruan. Baiezko kasuan, $\frac{dx}{dy}$ aurkitu.
- 3.- Bedi $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 2$ ekuazioa, y aldagaia mugatzen al du x eta z aldagaien funtzio implizitu gisa $(x,y,z) = (1,1,0)$ puntuaren inguruan? $\frac{dy}{dx}$ eta $\frac{dy}{dz}$ kalkulatu.
- 4.- $e^x + \ln y + 3(z-1)^2 = C$ ekuazioa emanda, zein balio hartu behar du C konstanteak z izan dadin x eta y -ren funtzio implizitua, $(x,y,z)=(0,1,0)$ puntuaren inguruan? $z = f(x,y)$ funtzioaren hurbilketa lineala egin puntu horren inguruan.
- 5.- $e^{xy^2} - 2x - 4y = C$ ekuazioa emanda, C -ren balioa kalkulatu $(x,y)=(0,1)$ puntuan y izan dadin x -en funtzio implizitua. $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{(0,1)}$ kalkulatu.
- 6.- Enpresa batek ondasun bat ekoizten du bi faktore erabilita. Ekoiztutako kopuruaren (q) eta erabilitako faktore kopuruaren (x, y) arteko erlazioa forma honetakoa da: $\ln q - \frac{x^2 y}{q} + 1 = 0$, non $x, y, q > 0$. Ezaguna da $x = y = 1$ erabiltzen denean, $q = 1$ ekoizten dela. Erlazio honek definitzen al du enpresaren ekoizpena, erabilitako faktoreen funtzio moduan? Bi faktoreen produktibitate marjinalak kalkulatu.
- 7.- Honako erlazioa emanda: $x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = 2$, mugatuta geratzen al da x_3 aldagaia beste bi aldagaien funtzio implizitu gisa $\vec{x}_0 = (1,1,2)$ puntuaren inguruan? Hala bada, bere deribatu partzialak kalkulatu emandako puntuan.
- 8.- Frogatu $x^y - y^x = 0$ ekuazioak $y = f(x)$ funtzio implizitua mugatzen duela $(x,y)=(1,1)$ puntuaren inguruan, eta $\frac{dy}{dx}$ lortu aipatu puntuan.



- 9.- Frogatu $\varphi(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy = 0$ ekuazioak $y = f(x)$ funtzio inplizitua mugatzen duela $(x, y) = (1, 1)$ puntuaren inguruan, eta puntu horretan $\frac{dy}{dx}$ eta $\frac{d^2y}{dx^2}$ kalkulatu. Zer gertatzen da $\left(2\frac{\sqrt[3]{4}}{3}; 2\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)$ puntuan?
- 10.- $f(x_1, x_2)$ izanik 3 ordenako funtzio homogeneoa, eta $f'_{x_1}(1, 1) = 2$ eta $f'_{x_2}(1, 1) = 3$ badira, $f(1, 1)$ kalkulatu. Erantzuna: $\frac{5}{3}$
- 11.- $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^3 - y^3}}{x^2 + y^2}$ funtzioa emanda, $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$ eragiketaren emaitza kalkulatu, f -ren deribatu partzialak kalkulatu gabe.
- 12.- $f(\vec{x})$ eta $g(\vec{x})$ izanik funtzio homogeneoak, m eta p ordenakoak, hurrenez hurren, esan $h(\vec{x}) = \alpha \cdot f(\vec{x}) + \beta \cdot g(\vec{x})$ funtzio homogeneoa den ala ez, α eta β zenbaki errealak izanik.
- 13.- $f(x, y) = \frac{x^2 y}{(x + y^2)^2}$ funtzioa emanda, bere deribatu partzialak kalkulatu gabe, esan honako berdintza egiaztatzen duen k zenbaki errealik ba ote dagoen:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = k \cdot f(x, y)$$
- 14.- Demagun $f(\vec{x})$ dela m ordenako funtzio homogeneoa, $f(-2, 2) = 1$ eta $f(-1, 1) = 1$ betetzen duena. Funtzio homogeneoaren definizioa erabiliz, m -ren balioa kalkulatu
- 15.- Demagun $f(\vec{x})$ dela $m=2$ ordenako funtzio homogeneoa, $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{(3,2)} = 3$ eta $\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{(3,2)} = 4$ betetzen duena; $f(3, 2)$ kalkulatu.
- 16.- $q(x, y) = \frac{x^2 + 5xy}{x + y}$ ekoizpen funtzioa emanda, frogatu:
- funtzio homogeneoa dela, 1 ordenakoa
 - batez besteko ekoizpenak $\left(\frac{q}{x_1} \text{ eta } \frac{q}{x_2}\right)$, zein produktibitate marjinalak $\left(\frac{\partial q}{\partial x_1} \text{ eta } \frac{\partial q}{\partial x_2}\right)$, erabilitako bi faktoreen zatiduraren menpekoak direla.
- 17.- $f(x, y)$ erako bi funtzio polinomikoen adibideak jarri, $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 4f$ betetzen dutenak.



18.- $z = \left(\frac{y}{x} - 2\right)^{1/3} \cdot x \cdot y^{1/2}$ funtzioa emanda: *hate lost.*

- homogeneoa ote den aztertu.
- frogatu bere deribatu partzialak funtzio homogeneoak direla, hauen ordena izanik z -ren ordena baino unitate bat txikiagoa.

19.- $z = f(x, y)$ funtzioaren elastikotasun partzialak hauek dira:

$$E_x f(x, y) \equiv \frac{x}{f(x, y)} \cdot \frac{df}{dx} = a \quad \text{eta} \quad E_y f(x, y) \equiv \frac{y}{f(x, y)} \cdot \frac{df}{dy} = b.$$

Frogatu f homogeneoa dela, $a + b$ ordenakoa.

20.- $f(x, y) = \frac{3x^2 + xy - y^2}{(xy + x^2)^{1/4}}$ funtzioa emanda, bere deribatu partzialak kalkulatu gabe, frogatu

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3}{2} f(x, y) \text{ betetzen duela.}$$

21.- Bedi Cobb-Douglas motako ekoizpen funtzio hau: $q = q(K, L) = 3K^{2\alpha}L^{\alpha/2}$. α -ren balioa

lortu, q funtzioak eskala-errendimendu konstanteak eduki ditzan. Balio horretarako, $\frac{\partial q}{\partial L}$ eta

$\frac{\partial q}{\partial K}$ produktibitate marjinalak kalkulatu. Homogeneoak dira? Zein ordenatakoak?



- 12) $f(x, y) = \frac{3x^2 + xy - y^2}{(xy + x^2)^{1/4}}$ funtzioaren hurbilketa lineala egin (1,0) puntuaren inguruan.

Erantzuna: $\frac{3x^2 + xy - y^2}{(xy + x^2)^{1/4}} \approx 3 + \frac{9}{2}(x-1) + \frac{1}{4}y$

- 13) a) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2$ funtzioaren hurbilketa lineala egin (2,1,1) puntuaren inguruan.

- b) $f(2'01, 1'01, 1)$ gutxi gora behera kalkulatu, aurreko hurbilketaz.

Erantzuna: a) $f(x_1, x_2, x_3) \approx 10 + 3\Delta x_1 + 8\Delta x_2 + 6\Delta x_3$

b) $f(2'01, 1'01, 1) \approx 10'11$



- 7) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ funtzioaren Tayloren bigarren mailako polinomioa lortu $x=1$ puntuan, eta $\sqrt[3]{0,97}$ balioaren hurbilketa bat kalkulatzeko erabili.

Erantzuna: $P_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 \rightarrow \sqrt[3]{0,97} \approx 0,9899$

- 8) Enpresa baten asteko salmentak (S), hiru aldagai hauen arabera dira: ondasunaren prezioa (P), publizitatea (A) eta merkataritza-ordezkarien kopurua (R), salmenta-funtzioa hau izanik: $S = (12.000 - 9P)\sqrt{AR}$. Hurbilketa lineala erabiliz, publizitatean gastatutakoa %16an gehitzeak salmentetan duen gutxi gora beherazko eragina kalkulatu. Zein izango da benetako aldaketa?

Hasierako egoera hau da: $R = 4; P = 1.300; A = 62.500$

Erantzuna: $\Delta V \approx 12.000 \quad \Delta V = 11.554'94$

- 9) $z = 4x^3y + 3x^2y^2 + 3xy^2 - 5x + 2$ funtzioaren hurbilketa egin bigarren mailako Tayloren polinomio baten bidez, $(0,1)$ puntuaren inguruan.

Erantzuna: $z = 2 - 8x + 3x^2 + 6xy$

- 10) Taylorren lehen eta bigarren mailako polinomioak lortu $y = \ln(1 + x_1 + x_2)$ funtzioarentzat, jatorriaren inguruan.

Erantzuna: a) $\ln(1 + x_1 + x_2) \approx x_1 + x_2$

b) $\ln(1 + x_1 + x_2) \approx x_1 + x_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2$

- 11) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ funtzioaren hurbilketa koadratikoa egin $(1,0)$ puntuaren inguruan.

Erantzuna: $\frac{x+y}{x-y} \approx 1 + 2y + 2y^2 - (x-1)y$

Bigarren ikasgaia (II)

- 1) $z = e^u + \sin v$ funtzioa emanda, non $u = xy$; $v = x + y$ diren, frogatu honako ekuazioa betetzen dela: $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = (x - y) \cos(x + y)$

- 2) $U = 10u^{-\frac{1}{2}}$ emanda, non $u = x^2 + y^2 + z^2$ den, ondokoa frogatu:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

- 3) $y = (\tan x)^{\sin x}$ deribatu, $\tan x = u$ eta $\sin x = v$ hartuta.

Erantzuna: $\frac{dy}{dx} = (\tan x)^{\sin x} \cdot \left(\frac{1}{\cos x} + \cos x \cdot \ln|\tan x| \right)$

- 4) $y = x_1^3 - x_1 x_2 + x_2^3$ funtzioaren lehen ordenako deribatu partzialak lortu, izanik $x_1 = u \cdot \cos v$ eta $x_2 = u \cdot \sin v$

Erantzuna: $\frac{\partial y}{\partial u} = 3x_1^2 \cos v - 2u \cdot \sin v \cdot \cos v + 3x_2^2 \sin v$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = x_2^2 - x_1^2 + 3x_1 x_2^2 - 3x_1^2 x_2$$

- 5) $u = xy \cdot f\left(\frac{x+y}{xy}\right)$ emanda, non f hautazko funtzio bat den, $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y}$ kalkulatu.

Erantzuna: $u(x - y)$

- 6) a) $f(\vec{x}) = x_1 x_2 + 3x_2^2 + 2x_1 x_3 + x_3^2$ funtzioaren hurbilketa lineala egin (2,1,1) puntuaren ingurune batean. b) Aurreko emaitza erabili $f(2'01, 1'01, 1)$ ren gutxi gora beherazko balioa kalkulatzeko.

Erantzuna: a) $f(\vec{x}) \cong -10 + 3x_1 + 8x_2 + 6x_3$ b) 10'11.



- 6) Q ondasunaren eskari-funtzioa bere prezioaren (P) eta sarrera-mailaren (Y) menpekoea dela estimatu da, honako erlazioaren arabera: $Q = 700 - 2P + 0'02Y$.

- a) Eskariaren elastikotasuna lortu P -rekiko.
- b) Eskariaren elastikotasuna lortu Y -rekiko.

- 7) Bi ondasunen eskari-funtzioak, haien prezioen menpekoak, ondokoak dira:

$$x = \frac{a}{p_x^2 p_y}; y = \frac{a}{p_x p_y}.$$

Ondasun osagarriak edo ordezkagarriak diren esan.

- 8) Eman dezagun nekazaritza-ekoizpena honelako funtzio batek adierazten duela:

$Q(K, L, T) = AK^a L^b T^c$; A , a , b eta c konstante positiboak izanik. Bertan, Q ekoiztutako unitateak dira, K inbertitu den kapitala, L lana eta T landutako luraren azalera..

- a) Produktibitate marjinalak lortu.
- b) Bigarren deribatu partzialak kalkulatu. Zein da hauen esanahi ekonomikoa?
- c) Aurreko galderan lortutako deribatu partzialen zeinuak aztertu.

Bigarren ikasgaia (I)

- 1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ funtzioa emanda, bere deribatu partzialak kalkulatu (1,1) puntuan, deribatu partzialaren definizioa erabiliz.
- 2) Ondoko funtzioen deribatu partzialak, gradientea, eta matrize hessiarra kalkulatu:
 - a) $f(x, y) = \ln(xy)$ b) $f(x, y) = e^{x^2+2y}$ c) $z = x \ln \frac{x}{y}$;
 - d) $y = x_1 x_2 x_3 - x_1^2 + x_2^3$ e) $z = \frac{5xy}{6x-8y}$ f) $y = (x_1^2 + 2x_1 x_2) \cdot \sin(x_1 x_2)$
 - g) $y = (x_1 + x_2)^{x_1 x_2}$ h) $z = \sqrt[3]{x + xy^2}$
- 3) Ondoko funtzioen deribatu partzialak, gradientea, eta matrize hessiarra kalkulatu, adierazten den puntuan:
 - a) $y = 8x_1^2 + 2x_1 x_2 - x_2^3$ (1,1) puntuan
 - b) $y = \ln \frac{x_1 + x_3}{x_1 x_2 x_3}$ (1,1,2) puntuan
 - c) $z = \frac{\ln x}{\ln y}$ (3,2) puntuan
 - d) $Q = 5K^{1/2} L^{1/2}$ (10,5) puntuan
- 4) $f(x, y) = x^3 e^{y^2}$ funtzioa emanda, bere hirugarren ordenako deribatu partzial guztiak kalkulatu.
- 5) Hurrengo ekoizpen-funtzioetan, faktore bakoitzaren produktibitate marjinala eta elastikotasuna kalkulatu.
 - a) $Q = 6x^2 + 3xy + 2y^2$
 - b) $Q = \frac{1}{2}K^2 - KL + L^2$
 - c) $Q = 20 + 8x + 3x^2 - \frac{1}{4}x^3 + 5y + 2y^2 - \frac{1}{2}y^3$